山梨大学一般 後期

平成23年度入学者選抜試験問題（数学）

1 次の問題文の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{サ}}$ にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。

(1) $(1+t+t^2+t^3+t^4+t^5)^3$ の t^4 の係数は $\boxed{\text{ア}}$ であり，t^7 の係数は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) $f(x)=\dfrac{2x+1}{3x+1}$，$g(x)=\dfrac{4x+2}{5x+1}$ とすると，$g(f(x))=\boxed{\text{ウ}}$，$f(g(x))=\boxed{\text{エ}}$ となる。また，分数関数 $h(x)$ が，$h(x)\neq -\dfrac{1}{3}$ となる x に対して，$f(h(x))=x$ を満たすとき，$h(x)=\boxed{\text{オ}}$ となる。

(3) さいころを3回投げる。このとき，偶数の目がちょうど2回出るという事象を A，4以上の目が少なくとも1回は出るという事象を B，4以上の目が少なくとも2回は出るという事象を C とすると，事象 $A\cap B$ の起こる確率 $P(A\cap B)$，事象 $A\cap C$ の起こる確率 $P(A\cap C)$ は，それぞれ $P(A\cap B)=\boxed{\text{カ}}$，$P(A\cap C)=\boxed{\text{キ}}$ である。

(4) 円 $x^2+y^2=1$ に外部の点 $\mathrm{A}(a,b)$ から引いた2本の接線の接点を S, T とする。$\angle\mathrm{SAT}=\theta$ $(0^\circ<\theta<180^\circ)$ とするとき，$\cos\theta=\boxed{\text{ク}}$，$\sin\theta=\boxed{\text{ケ}}$ である。

(5) △ABC の辺 AB を $2:1$ に内分する点を D，辺 AC を $1:3$ に内分する点を E とし，線分 CD, BE の交点を F とすると，CF : FD $=\boxed{\text{コ}}$，BF : FE $=\boxed{\text{サ}}$ となる。

2 1から n までの整数が1つずつ書かれた n 枚のカードがあり，無作為に1枚選んで，書かれた数を記録して元に戻す。この試行を4回行い，記録された数を順に a, b, c, d とする。

(1) $n=4$ のとき，$ad-bc=0$ となる確率を求めよ。

(2) $n=6$ のとき，行列 $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，$X^2=3X$ となる確率を求めよ。

(3) 自然数 n に対して，$a+b=c+d$ となる確率を求めよ。

(4) 自然数 n に対して，$ad-bc=0$ となる確率を p_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n=0$ であることを示せ。

3 成分が整数である2次の正方行列の集合を，$S=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\,\middle|\, a,b,c,d \text{ は整数}\right\}$ とする。

(1) 2次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ および A の逆行列が S に属するとき，$|ad-bc|=1$ であることを示せ。

(2) 次の条件を満たす2次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の例を1つあげよ。

a,b,c,d は整数でない有理数で，$ad-bc\neq 0$ かつ A^2 は S に属する。

(3) 有理数を成分とする2次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，A^2 が S に属するならば，$ad-bc$ は整数であることを示せ。

4 自然数 n に対して，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log k$ とおく。

(1) n を2以上の自然数とするとき，$S_{n-1}+\dfrac{1}{2}\log n \leqq \displaystyle\int_1^n \log x\,dx$ となることを示せ。ただし，$0<a<b$，$a\leqq x\leqq b$ のとき，$\dfrac{\log b-\log a}{b-a}(x-a)+\log a\leqq \log x$ が成り立つことを用いてもよい。

(2) n を2以上の自然数とするとき，$S_{n-1}+\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k}\geqq\int_1^n \log x\,dx$ となることを示せ。

(3) 任意の自然数 n に対して，$e^{-n+\frac{1}{2}}n^{n+\frac{1}{2}}\leqq n!\leqq e^{-n+1}n^{n+\frac{1}{2}}$ となることを示せ。

(注意)　試験開始後，問題１枚，答案用紙７枚（（数学の１）～（数学の７））および計算用紙３枚があることを確認して下さい。解答は指定された答案用紙に書いて下さい。(数学の１）では表面に解答し，（数学の１）以外では，裏面を使用する場合はその旨を記して下さい。
試験終了後，答案用紙７枚全てを必ず提出して下さい。計算用紙は採点の対象にはなりませんので，３枚とも必ず持ち帰って下さい。問題も必ず持ち帰って下さい。

平成23年度入学者選抜試験答案用紙（数学の１）

１の解答を必ず解答欄内に書いて下さい。

(1)

ア		イ	

(2)

ウ		エ	
オ			

(3)

カ		キ	

(4)

ク		ケ	

(5)

コ		サ	

受験番号	小　計

平成23年度入学者選抜試験答案用紙（数学の２）

２の解答を書いて下さい。

受　験　番　号	小　　計

２の解答の**つづき**を書いて下さい。

受　験　番　号

平成23年度入学者選抜試験答案用紙（数学の４）

３の解答を書いて下さい。

受　験　番　号	小　計

３の解答の**つづき**を書いて下さい。

受　験　番　号

４の解答を書いて下さい。

受 験 番 号	小　計

４の解答の**つづき**を書いて下さい。

受　験　番　号