

# 山形大学

平成 25 年度入学者選抜試験問題

医学部医学科

## 数 学

前 期 日 程

### 注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 解答用紙4枚と下書き用紙4枚は問題冊子とは別になっています。
- 3 問題は「第1問」、「第2問」、「第3問」、「第4問」の4問です。
- 4 問題の解答を、それぞれ対応した番号の解答用紙に書きなさい。
- 5 試験中に問題冊子の印刷不鮮明・落丁・乱丁、解答用紙の汚れなどに気が付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- 6 監督者の指示にしたがって、4枚の解答用紙それぞれに学部名と大学受験番号を正しく記入しなさい。学部名と大学受験番号が正しく記入されていない場合は、採点されないことがあります。
- 7 定規は、使用してもかまいません。
- 8 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は持ち帰ってください。

## 第 1 問

面積が 1 である  $\triangle ABC$  の辺  $BC$  上に点  $D$  があり, 辺  $CA$  上に点  $E$  があり, 辺  $AB$  上に点  $F$  がある. 正の実数  $x, y, z, w$  を  $AF:FB = x:y$ ,  $BD:DC = y:z$ ,  $CE:EA = z:w$  となるように定める. 線分  $AD, BE, CF$  が  $\triangle ABC$  の内部の点  $G$  で交わるとき, 次の間に答えよ.

- (1) 三角形の面積の比を用いて,  $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{w} = 1$  となることを示せ.
- (2)  $\triangle AFE$  の面積を  $x, y, z$  を用いて表せ.
- (3)  $\alpha = \frac{x}{y}$ ,  $\beta = \frac{y}{z}$  とする. このとき,  $\triangle DEF$  の面積を  $\alpha, \beta$  を用いて表せ.
- (4)  $\triangle DEF$  の面積が最大となるのは, 点  $D, E, F$  が各辺の midpoint となるときであることを示せ.

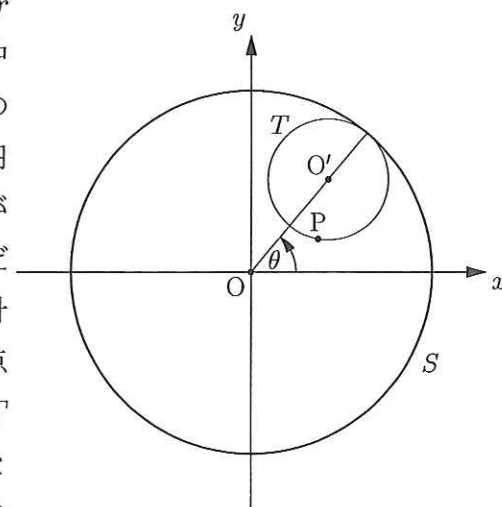
## 第2問

公差が0でない等差数列  $\{a_n\}$  において、初項から第  $n$  項までの和を  $S_n$  とする。また、 $a_5^2 + a_6^2 = a_7^2 + a_8^2$ 、 $S_{13} = 13$  が成り立つとする。このとき、次の間に答えよ。

- (1)  $a_5 + a_8 = a_6 + a_7$ であることを示せ。
- (2) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。
- (3)  $S_n$  を求めよ。
- (4)  $m$  を自然数とする。  $\frac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}}$  の値が数列  $\{a_n\}$  の項として現れるすべての  $m$  を求めよ。

### 第3問

$R, r$  を正の実数とし,  $2r < R \leq 3r$  とする. 右図のように, 原点  $O$  を中心とする半径  $R$  の固定された円  $S$  の内部に点  $O'$  を中心とする半径  $r$  の円  $T$  があり, 円  $T$  は円  $S$  に接しながらずべらずに転がるものとする. ただし, 点  $O'$  は点  $O$  のまわりを反時計まわりに動くものとする. はじめに点  $O'$  は  $(R-r, 0)$  の位置にあり, 円  $T$  上の点  $P$  は  $(R, 0)$  の位置にあるとする.  $x$  軸の正の部分と動径  $OO'$  の



なす角が  $\theta$  ラジアンするとき, 点  $P$  の座標を  $(x(\theta), y(\theta))$  とする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1)  $x(\theta), y(\theta)$  を  $\theta$  を用いて表せ.
- (2)  $0 < \theta < \frac{2r}{R} \cdot \frac{3}{2}\pi$  において,  $x(\theta)$  が最小となるときの  $\theta$  の値を求めよ.
- (3)  $R = 3, r = 1$  とする.  $\theta > 0$  で点  $P$  がはじめて  $x$  軸に到達したときの角  $\theta_0$  を求めよ. また,  $0 \leq \theta \leq \theta_0$  のとき,  $y(\theta) \geq 0$  を示せ.
- (4)  $R = 3, r = 1$  とする.  $0 \leq \theta \leq \theta_0$  における点  $P$  の軌跡と  $x$  軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

## 第4問

自然数  $n$  に対し、座標平面上の点  $(n, 1)$  を  $P_n$  とする。また、 $r$  を正の実数とする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) 1次変換  $f$  は、すべての  $n$  に対して  $f(P_n) = P_{n+1}$  を満たすとする。 $f$  を表す行列  $A$  を求めよ。
- (2) 1次変換  $g$  は、点  $(1, 1)$  を点  $(-2r, 1)$  に、点  $(-2r, 1)$  を点  $(2r^2 - r, 1)$  に移すとする。 $g$  を表す行列  $B$  を求めよ。
- (3)  $C = ABA^{-1}$  とする。行列  $C^n$  を推定し、それが正しいことを数学的帰納法によって示せ。
- (4) 行列  $C^n$  で表される1次変換による点  $(1, r)$  の像の  $x$  座標を  $x_n$  とする。 $r < 1$  のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  を求めよ。