



過去問ライブラリー

Powered by 全国大学入試問題正解

# 山口大学

## 数学

### 問題

#### 2019年度入試

**【学部】** 教育学部、理学部、医学部、工学部

**【入試名】** 前期日程

**【試験日】** 2月25日

**【試験時間】** 150分

**【問題解答前の確認事項】**

〔注意〕 理系  $\beta$  は理（数理科学）・医（医）で 5～8、それ以外は理系  $\alpha$  で 1～4 を解答すること。



「過去問ライブラリーは、（株）旺文社が刊行する「全国大学入試問題正解」を中心とした過去問、研究・解答（解答・解説）を掲載しています。本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は、（株）旺文社または各情報提供者に帰属します。本サービスに掲載の全部または一部の無断複製、配布、転載、譲渡等を禁止します。各設問に対する「研究・解答」は原則として旺文社が独自に作成したものを掲載しています。掲載問題のうち★印を付したものは、著作権法第67条の2第1項の規定により文化庁長官に裁定申請を行った上で利用しています。」

裁定申請日 【2017年】8/1 【2018年】4/24、9/20 【2019年】6/20

**1** 次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  がある.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2 + \frac{3}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えなさい.

- (1) 2次方程式  $x^2 - 2x - 3 = 0$  の2つの実数解  $\alpha, \beta$  を求めなさい. ただし,  $\alpha > \beta$  とする.
- (2) (1)で求めた  $\alpha, \beta$  に対して,  $b_n = \frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta}$  とおくとき, 数列  $\{b_n\}$  は等比数列であることを示しなさい.
- (3) (2)で定めた数列  $\{b_n\}$  の一般項と数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めなさい.
- (4) 極限値  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めなさい.

**2** 関数  $f(x) = \sin^2 x, g(x) = \cos^2 x$  について, 次の問いに答えなさい.

- (1) 関数  $y = f(x)$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) の増減, グラフの凹凸を調べ, グラフをかきなさい.
- (2)  $0 < a < \frac{\pi}{4}$  とする. 2つの曲線  $y = f(x), y = g(x)$  および2つの直線  $x = 0, x = a$  で囲まれる部分の面積を  $S$  とする. また, 曲線  $y = f(x)$  の点  $A(a, f(a))$  における接線と, 曲線  $y = g(x)$  の点  $B(a, g(a))$  における接線の交点を  $C$  とし,  $\triangle ABC$  の面積を  $T$  とする.
  - (i)  $S$  を  $a$  を用いて表しなさい.
  - (ii) 点  $C$  の座標を  $a$  を用いて表しなさい.
  - (iii)  $S + T = \frac{5}{8}$  が成り立つとき,  $a$  の値を求めなさい.

**3**  $x > 0$  とする. 点  $O$  を原点とする座標空間において, 3点  $A(1, 2, 0), B(2, 1, 1), C(x, 0, 4)$  の定める平面を  $\alpha$  とする.  $\alpha$  における  $\triangle ABC$  の外心を  $P$  とするとき, 次の問いに答えなさい.

- (1) 線分  $AB$  の中点  $M$  の座標を求めなさい. また, 線分  $AC$  の中点  $N$  の座標を,  $x$  を用いて表しなさい.
- (2)  $\angle AOB \leq \angle BOC$  のとき,  $x$  のとり得る値の範囲を求めなさい. ただし,  $0^\circ \leq \angle AOB \leq 180^\circ, 0^\circ \leq \angle BOC \leq 180^\circ$  とする.
- (3)  $\angle AOB = \angle BOC$  のとき, 点  $P$  の座標を求めなさい.

**4** 次の問いに答えなさい. ただし,  $i$  は虚数単位である.

- (1) 複素数平面上で等式

$$|3z - 4i| = 2|z - 3i|$$

を満たす点  $z$  の全体はどのような图形を表すか答えなさい.

- (2) 複素数  $z$  が (1) の等式を満たすとき,  $\left|z + \frac{1}{z} + 2i\right|$  の最大値と最小値を求めなさい. また, そのときの  $z$  の値をそれぞれ求めなさい.

**5** 次の問いに答えなさい. ただし, 対数は自然対数とする.

- (1)  $x > 0$  のとき, 不等式  $x > \log(1+x)$  が成り立つことを示しなさい.
- (2) 関数  $f(x)$  は,  $x \geq 0$  で定義された連続関数で,  $f(0) = 0$  を満たし,  $x > 0$  で第2次導関数  $f''(x)$  をもつとする.  $x > 0$  で常に  $f''(x) < 0$  ならば, 関数  $\frac{f(x)}{x}$  は  $x > 0$  で減少することを示しなさい.
- (3)  $0 < a < b < 1$  のとき, 次の不等式が成り立つことを示しなさい.

$$\frac{a}{b} < \frac{\log(1+a)}{\log(1+b)} < \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{a}{b}$$

**6** 三角形の3頂点から対辺またはその延長に下ろした垂線は, 1点で交わる. その点を三角形の垂心という.  $\triangle ABC$  の外心を  $O$ , 垂心を  $H$  とするとき, 次の問いに答えなさい. ただし,  $\triangle ABC$  は直角三角形ではないとする.

- (1) 直線  $OB$  と  $\triangle ABC$  の外接円との交点で  $B$  でない点を  $D$  とする. 四角形  $AHCD$  は平行四辺形であることを示しなさい.
- (2) 辺  $BC$  の中点を  $M$  とする.  $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$  が成り立つことを示しなさい.
- (3)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$  が成り立つことを示しなさい.

**7** 実数  $x$  に対して,  $3n \leq x < 3n + 3$  を満たす整数  $n$  により,

$$f(x) = \begin{cases} |3n+1-x| & (3n \leq x < 3n+2 \text{ のとき}) \\ 1 & (3n+2 \leq x < 3n+3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とする. 関数  $f(x)$  について, 次の問い合わせに答えなさい. ただし,  $e$  は自然対数の底とする.

(1)  $0 \leq x \leq 7$  のとき,  $y = f(x)$  のグラフをかきなさい.

(2) 0 以上の整数  $n$  に対して,  $I_n = \int_{3n}^{3n+3} f(x)e^{-x} dx$  とする.  $I_n$  を求めなさい.

(3) 自然数  $n$  に対して,  $J_n = \int_0^{3n} f(x)e^{-x} dx$  とする.  $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n$  を求めなさい.

**8** 次の問い合わせに答えなさい.

(1)  $p, q, r$  を実数とする.  $p - q = r$  ならば,  $|p|$  と  $|q|$  のうち少なくとも一方は  $\frac{|r|}{2}$  以上であること を示しなさい.

(2)  $a, k$  は実数で,  $a > 0, k \geq 0$  とする. 関数  $f(x) = ax^2$  の  $k-5 \leq x \leq k-3$  における最大値を  $L$ , 最小値を  $S$  とする. このとき, 不等式  $L - S \geq a$  が成り立つことを示しなさい.

(3)  $a, b, c$  は実数で,  $a > 0, b \geq 0$  とする. 関数  $g(x) = |ax^2 + bx + c|$  の  $-5 \leq x \leq -3$  における最大値を  $M$  とする. このとき, 不等式  $M \geq \frac{a}{2}$  が成り立つことを示しなさい.