

山口大学

数学

問題

2018年度入試

【学部】 教育学部、理学部、医学部、工学部

【入試名】 前期日程

【試験日】 2月25日

【問題解答前の確認事項】

【注意】 理系 β は理（数理科学）・医（医）で **5**～**8**，それ以外は理系 α で **1**～**4** を解答すること。



「過去問ライブラリーは、（株）旺文社が刊行する「全国大学入試問題正解」を中心とした過去問、研究・解答（解答・解説）を掲載しています。本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は、（株）旺文社または各情報提供者に帰属します。本サービスに掲載の全部または一部の無断複製、配布、転載、譲渡等を禁止します。各設問に対する「研究・解答」は原則として旺文社が独自に作成したものを掲載しています。掲載問題のうち★印を付したものは、著作権法第67条の2第1項の規定により文化庁長官に裁定申請を行った上で利用しています。

裁定申請日 【2017年】 8/1 【2018年】 4/24、9/20 【2019年】 6/20

- 1 空間内の3点 $A(1, 3, -2)$, $B(3, 2, -1)$, $C(2, 1, 3)$ について、次の問いに答えなさい。(配点 50)
- (1) $\angle BAC = \theta$ とするとき、 $\cos \theta$ の値を求めなさい。
 - (2) $\triangle ABC$ の面積 S を求めなさい。
 - (3) $\triangle ABC$ を含む平面に垂直なベクトルを $(x, y, 1)$ と表すとき、 x, y の値をそれぞれ求めなさい。
 - (4) 原点を O とするとき、四面体 $OABC$ の体積 V を求めなさい。

- 2 座標平面において、連立不等式

$$x \geq 0, y \geq 0, y \leq -x + 8, y \leq -2x + 12$$

の表す領域を D とし、 a を正の定数とする。点 (x, y) が領域 D 内を動くとき、 $ax + y$ の最大値を M とする。このとき、次の問いに答えなさい。(配点 50)

- (1) 2 直線 $y = -x + 8$ と $y = -2x + 12$ の交点を求め、領域 D を図示しなさい。
- (2) $0 < a < 1$ のとき、 M の値を求めなさい。
- (3) $1 \leq a$ のとき、 a を用いて M を表しなさい。

- 3 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n^2 - a_n + \frac{3}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、次の問いに答えなさい。(配点 50)

- (1) $b_n = a_n - \frac{1}{2}$ とおくと、初項 b_1 の値を求め、さらに b_n を用いて b_{n+1} を表しなさい。
- (2) (1) で定められた数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めることにより、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めなさい。

- 4 次の問いに答えなさい。(配点 50)

- (1) $0 \leq x \leq \pi$ のとき、方程式 $3 \cos x - 2 \sin^2 x = 0$ を満たす x の値を求めなさい。
- (2) $f(x) = e^{\frac{x}{3} \cos x} \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) とするとき、 $f(x)$ の最大値を求めなさい。
- (3) (2) の $f(x)$ に対して、曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる図形の面積 S を求めなさい。

- 5 n を自然数とする。このとき、次の問いに答えなさい。(配点 50)

- (1) 方程式 $z^n = 1$ の解をすべて求め、極形式で表しなさい。ただし、解 z の偏角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。
- (2) (1) で得られた解を偏角が小さい順に $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ とおく。このとき、すべての $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ に対して、

$$|c_{k+1} - c_k| = \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right)}$$

が成り立つことを示しなさい。ただし、 $c_n = c_0$ とする。

- (3) (2) の c_k に対して $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} |c_{k+1} - c_k|$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めなさい。

- 6 実数 t に対して、 xy 平面上で曲線

$$C: y = -x^3 + 3t^2x - 2t^3 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

を考える。 t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき、曲線 C が通過する領域を図示し、その面積 S を求めなさい。(配点 50)

- 7 n を自然数とする。このとき、次の問いに答えなさい。(配点 50)

- (1) 連続な関数 $f(x)$ が区間 $[0, 1]$ で増加するとき、

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

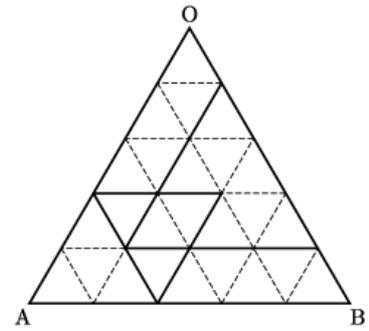
が成り立つことを示しなさい。

- (2) a が正の有理数のとき、

$$n^{a+1} \leq (a+1) \sum_{k=1}^n k^a \leq (n+1)^{a+1}$$

が成り立つことを示しなさい。ただし、 x^a が連続な関数であることを証明なしに用いてもよい。

- 8 n を自然数とする. 正三角形 OAB の各辺を n 等分してできる点を通り, 辺 OA , OB , AB に平行な直線をすべて引く. これらの直線と辺 OA , OB , AB の中の 3 本によって作られる正三角形のうち, 正三角形 OAB からはみ出ないものを考える. そのような正三角形の個数を t_n とする. ただし, $n = 1$ のときは正三角形 OAB のみを考えて, $t_1 = 1$ とする. このとき, 次の問いに答えなさい. (配点 50)
- (1) $t_2 = 5$ である. t_3 の値を求めなさい.
 - (2) 1 辺が辺 AB 上にある正三角形の個数を n を用いて表しなさい.
 - (3) 辺 AB と 1 点のみを共有する正三角形の個数を, n が偶数と奇数の場合に分け, n を用いて表しなさい.
 - (4) $u_n = t_{2n-1}$ とおくと, $u_{n+1} - u_n$ を n を用いて表しなさい.
 - (5) n が奇数のとき, n を用いて t_n を表しなさい.

図: $n=5$ の場合