# 宮崎大学

## 数学

## 問題

### 2019年度入試

**【学部】**　教育学部、医学部、工学部、農学部

**【入試名】**　前期日程

**【試験日】**　2月25日

**【試験時間】**　工・医（医）学部は120分，農・教育学部は90分

**【問題解答前の確認事項】**

〔入試科目〕　工・医（医）・教育（学校教育〈小中一貫教育＝理系入試〉以上をⒶ）学部は数Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A（場 図 整）・B（列 ベ）．農・教育（Ⓐを除く）学部は数Ⅰ・Ⅱ・A（場 図 整）・B（列 ベ）農・教育（Ⓐを除く）学部は他教科との選択．

〔注意〕　工学部は1～5，医学部は3，6～9，教育学部（Ⓐ）は2，5，10，11，農・教育（Ⓐを除く）学部は5，10，12を解答．

**1** 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．ただし，$\log x$ は $x$ の自然対数を表す．

(1) 関数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4+3x^2}}$ の導関数は，$f'(x)=\dfrac{\boxed{\text{あ}}}{(4+3x^2)^{\frac{3}{2}}}$ である．

(2) 関数 $f(x)=\sin x\tan x$ の導関数は，$f'(x)=\boxed{\text{い}}\left(1+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$ である．

(3) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx=\boxed{\text{う}}+C$ である．
ただし，$C$ は積分定数とする．

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \log(x+1)\,dx$ の値は $\boxed{\text{え}}$ である．

(5) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(5x)\cos(2x)\,dx$ の値は $\boxed{\text{お}}$ である．

**2** 関数 $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ および座標平面上の曲線 $C\colon y=f(x)$ について，次の各問に答えよ．

(1) 第 1 次導関数 $f'(x)$，第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の増減，極値，曲線 $C$ の凹凸，および変曲点を調べて，$C$ の概形をかけ．ただし，
$\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}=0$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}=0$ が成り立つことは既知としてよい．

(3) 正の実数 $t$ に対し，曲線 $C$，$x$ 軸，および直線 $x=t$ で囲まれた部分の面積 $S$ を，$t$ を用いて表せ．

**3** 四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=60^\circ$，$\angle\mathrm{COA}=90^\circ$ とし，OB を $3:1$ に内分する点を D とする．$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ の値を求めよ．

(2) 線分 DA，DC の長さを求めよ．

(3) 三角形 ACD の面積を求めよ．

(4) 点 O から 3 点 A，C，D を含む平面に下ろした垂線の足を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

**4** 3 つの複素数 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ は $|\alpha|=1$，$|\beta|=4$，$|\gamma|=5$，$\arg\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，$\arg\beta=\dfrac{4}{3}\pi$，$\arg\gamma=\dfrac{5}{3}\pi$ を満たすとする．複素数平面上で，$\alpha$，$\beta$，$\gamma$ が表す点をそれぞれ A，B，C とするとき，次の各問に答えよ．ただし，$i$ は虚数単位とする．

(1) $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ を $x+yi$（$x$，$y$ は実数）の形でそれぞれ表し，複素数平面上に点 A，B，C を図示せよ．

(2) 線分 AB の長さを求めよ．

(3) 三角形 ABC の面積を求めよ．

(4) 三角形 ABC の外接円の中心を表す複素数を求めよ．

**5** $a$ を自然数とする．自然数 $n$ に対し，$b_n=n(n^2+a)$ とする．このとき，命題

(∗)　すべての自然数 $n$ に対し，$b_n$ は 6 の倍数である

について，次の各問に答えよ．

(1) $a=5$ のとき，命題 (∗) が真であることを示せ．

(2) 命題 (∗) が真であるような $a$ の値をすべて求めよ．

**6** 連立不等式

$$\begin{cases} 0\leqq x\leqq 2\pi & \cdots\cdots① \\ 0\leqq y\leqq 2\pi & \cdots\cdots② \\ \cos x\cos y+\sin x\cos y\geqq \sin x\sin y-\cos x\sin y+1 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

の表す領域を座標平面上に図示せよ．

**7** 重ねた $n$ 枚のカードを上から順に以下の方法を組み合わせて過不足なくすべて取ることを考える．

　A：1度にちょうど1枚取る

　B：1度にちょうど2枚取る

　C：1度にちょうど3枚取る

重ねた $n$ 枚のカードを過不足なくすべて取る場合の数を $a_n$ とする．
例えば，$n=4$ のとき，1回目に方法A，2回目に方法A，3回目に方法Bで4枚を過不足なくすべて取ることをAABと表すことにすれば，4枚のカードを過不足なくすべて取る仕方は

AAAA，AAB，ABA，BAA，AC，CA，BB

の7通りである．よって，$a_4=7$ である．
このとき，次の各問に答えよ．

(1) $a_1$，$a_2$，$a_3$ を求めよ．

(2) $n \geqq 4$ のとき，$a_n$ を，$a_{n-1}$，$a_{n-2}$，$a_{n-3}$ を用いて表せ．

(3) $a_{10}$ を求めよ．

(4)「方法Cを2回以上続けて用いることはできない」という制約を付け加えるとき，重ねた10枚のカードを過不足なくすべて取る場合の数を求めよ．

**8** $k$ を定数とする．$-2 \leqq x \leqq 2$ で定義される関数 $f(x)=k+x+\sqrt{4-x^2}$ について，座標平面上の曲線 $C: y=f(x)$ を考える．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 曲線 $C$ と $x$ 軸が共有点をもつように，$k$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 連立不等式

$$\begin{cases} -2 \leqq x \leqq 2 \\ 0 \leqq y \leqq \left|f(x)\right| \end{cases}$$

の表す領域を $x$ 軸の周りに1回転させてできる立体の体積 $V$ を，$k$ を用いて表せ．

(3) (1) の $k$ の値の範囲で，(2) の体積 $V$ が最小となる $k$ の値と，そのときの $V$ の値を求めよ．

**9** $x$ についての整式 $P(x)$ は，$(x+1)^2$ で割ると $-x+4$ 余り，$(x-1)^2$ で割ると $2x+5$ 余るとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $P(x)$ を $(x+1)(x-1)$ で割ったときの余りを求めよ．

(2) $P(x)$ を $(x+1)(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ．

(3) $P(x)$ を $(x+1)^2(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ．

**10** 0から9までの数字が1つずつ書かれた10枚のカード

$\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}\boxed{7}\boxed{8}\boxed{9}$

が1つの袋に入っている．1枚のカードを袋から取り出し，カードに書かれている数字を確認し，元に戻すという試行を3回行う．

　1回目の試行で確認したカードの数字を $X$,

　2回目の試行で確認したカードの数字を $Y$,

　3回目の試行で確認したカードの数字を $Z$

とする．ただし，どのカードも同じ確率で取り出されるとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $X+Y+Z=0$ となる確率を求めよ．

(2) $X=3$ かつ $X+Y+Z=9$ となる確率を求めよ．

(3) $X+Y+Z=9$ となる確率を求めよ．

(4) $X+Y+Z=12$ となる確率を求めよ．

**11** $0 \leqq x \leqq 2\pi$ に対して，$y=\sin 2x+\sqrt{6}(\sin x+\cos x)$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $\sin x+\cos x$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $t=\sin x+\cos x$ とし，$y$ を，$t$ を用いて表せ．

(3) $y$ の最大値および最小値と，それらを与える $x$ の値をすべて求めよ．

**12** $a$，$b$，$c$ を実数とし，$a>0$ とする．関数 $f(x)=x^2+1$，$g(x)=-ax^2+bx+c$ に対し，座標平面上の放物線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ をそれぞれ $C_1$，$C_2$ とする．$C_1$ 上の点 $\mathrm{P}(1,\ 2)$ における $C_1$ の接線を $l$ とする．$C_2$ は P を通り，$l$ は P における $C_2$ の接線でもある．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 接線 $l$ の方程式を求めよ．

(2) 放物線 $C_2$ の頂点の座標を，$a$ を用いて表せ．

(3) 放物線 $C_1$，接線 $l$，および $y$ 軸で囲まれる部分の面積を $S_1$ とし，放物線 $C_2$，$l$，および $C_2$ の軸で囲まれる部分の面積を $S_2$ とする．$S_2=2S_1$ であるとき，$a$ の値を求めよ．