奈良県立医科大学 推薦

平 成 31 年 度

試 験 問 題 ①

学 科 試 験

(9時 ~ 12時)

【注 意】

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中をみてはならない.
2. 試験教科，試験科目，ページ，解答用紙および選択方法は下表のとおりである.

教 科	科 目	ページ	解答用紙数	選 択 方 法
数 学	数 学	1 ~ 10	2 枚	数学，英語は必須解答とする.
英 語	英 語	11 ~ 14	3 枚	
理 科	化 学	15 ~ 26	2 枚	理科は左の3科目のうちから1科目を選択せよ.
	生 物	27 ~ 44	2 枚	
	物 理	45 ~ 52	1 枚	

3. 監督者の指示に従って，選択しない理科科目を含む全解答用紙(10枚)に受験番号と選択科目(理科のみ)を記入せよ.
   ① 受験番号欄に受験番号を記入せよ.
   ② 理科は選択科目記入欄に選択する1科目を○印で示せ.
   上記①，②の記入がないもの，および理科2科目または理科3科目選択した場合は答案全部を無効とする.
4. 解答はすべて解答用紙の対応する場所に記入せよ.
5. 問題冊子の余白を使って，計算等を行ってもよい.
6. 試験開始後，問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせよ.
7. 解答用紙はいずれのページも切り離してはならない.
8. 解答用紙は持ち帰ってはならない. 問題冊子は持ち帰ってよい.

数 学

【1】 以下の問に答えよ．ただし，答のみ記入すればよい．

未知数 x に関する方程式 $(x^2+1)(x^2+3x+2+a)-a+a^2=0$ を考える．

(1) 実部が 0 の複素数を解にもつような実数 a をすべて求めよ．

(2) (1) で求めたそれぞれの a の値に対して，そのときの方程式の解をすべて求めよ．

－余白（計算用紙）－

【2】 以下の文章の空欄に適切な数, 式または数学記号を入れて文章を完成させよ.
床の上にある第 0, 1, 2, 3 段からなる階段を上下に移動することを考える. ただし, 床を第 0 段とし, 初めは床にいるものとする. 1 度の移動のルールは以下の通りである.

- 床にいる場合は必ず第 1 段に移動する.
- 第 1 段にいる場合は, 床か第 2 段のどちらかにそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で移動する.
- 第 2 段にいる場合は, 第 1 段か第 3 段のどちらかにそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で移動する.

第 3 段に到達したらそれ以降は移動しない.

(1) 3 回目の移動後に第 3 段にいる確率は $\boxed{\text{ア}}$ である.

(2) 4 回目の移動までは第 3 段に到達せず, 5 回目の移動後に第 1 段にいる確率は $\boxed{\text{イ}}$ である.

(3) 6 回目の移動までは第 3 段に到達せず, 7 回目の移動後に第 3 段にいる確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である.

(4) $2n$ 回目の移動までは第 3 段に到達せず, $(2n+1)$ 回目の移動後に第 3 段にいる確率は $\boxed{\text{エ}}$ である.

－余白（計算用紙）－

【3】 空欄に適切な数学記号または数学用語を入れて下記の文章を完成させよ．ただし，(サ)，(セ)，(ソ)には数学用語を記入すること．

xyz 空間において $x^2+y^2=z^2$ で定義される円錐面と $x\sin\theta+z\cos\theta=\cos^2\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ で定まる平面との交線を考える．この平面を $P(\theta)$，交線を $C(\theta)$ と表す．$\theta=0$ の時の交線 $C(0)$ は半径 $\boxed{\text{ア}}$ の円である．また，$\theta=\frac{\pi}{2}$ の時には，交線 $C\left(\frac{\pi}{2}\right)$ は yz 平面において方程式 $\boxed{\text{イ}}=0$ で定義される．以下では，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の場合を考える．また，大きさ1のベクトルを単位ベクトルと呼ぶ．

(1) 平面 $P(\theta)$ に垂直な単位法線ベクトルで z 成分が正のものは $\vec{n}=\left(\boxed{\text{ウ}}\right)$ である．平面 $P(\theta)$ 内に単位ベクトル $\vec{a}=(0,1,0)$ を取ることができる．同じく，平面 $P(\theta)$ 内に単位ベクトル $\vec{b}$ を，$\vec{a}$ に直交し，かつ，その x 成分が正となるようにとると，$\vec{b}=\left(\boxed{\text{エ}}\right)$ となる．平面 $P(\theta)$ 上に任意に1点Aをとり，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の始点の位置を平面 $P(\theta)$ 上の点Aにとると，平面 $P(\theta)$ の任意の点の位置ベクトル $\vec{r}$ は実数 q_1, q_2 を用いて，$\vec{r}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q_1\vec{a}+q_2\vec{b}$ の形に表すことができる．特に，点Aを平面 $P(\theta)$ と z 軸との交点とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boxed{\text{オ}}\,\vec{e}_3$ となる．ただし，$\vec{e}_3=(0,0,1)$ とする．

(2) 上記(1)の設定のもとで，交線 $C(\theta)$ について考える．$\vec{r}$ の終点が交線 $C(\theta)$ 上にあるとすると，q_1, q_2 は

$$q_1^2+k\,q_2^2+\ell\,q_2=m \qquad (*)$$

の形の制約をうける．k, l, m を q_1, q_2 を用いず θ を用いて書くと，$k=\boxed{\text{カ}}$，$\ell=\boxed{\text{キ}}$，$m=\boxed{\text{ク}}$ である．いま，$k=0$ とすると，$\theta=\boxed{\text{ケ}}$ となる．この θ の値を θ_0 と表す．このとき，q_1 と q_2 との関係は $\boxed{\text{コ}}$ となり，曲線 $C(\theta_0)$ は $\boxed{\text{サ}}$ を表す．次に，$k\neq 0$ の条件のもとで $(*)$ を整理すると，k, l, m を用いて次のよう書ける．

$$q_1^2+k\left(q_2+\boxed{\text{シ}}\right)^2=\boxed{\text{ス}}.$$

したがって，$k>0$ のとき，つまり $0<\theta<\theta_0$ のとき，$\boxed{\text{ス}}$ は正になるので曲線 $C(\theta)$ は $\boxed{\text{セ}}$ である．また $k<0$ のとき，つまり $\theta_0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき，曲線 $C(\theta)$ は $\boxed{\text{ソ}}$ となる．

－余白（計算用紙）－

【4】 以下の文章の空欄に適切な数を入れて文章を完成させよ．

正の整数 n に対して，n の約数の個数を $f(n)$ で，n の約数の総和を $g(n)$ で表す．例えば，6 の約数は $1, 2, 3, 6$ であるから $f(6) = 4$, $g(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$ となる．$n = 2700$ のとき，$f(2700) = \boxed{\text{ア}}$ であり，$g(2700) = \boxed{\text{イ}}$ である．また，$f(10!) = \boxed{\text{ウ}}$ である．さらに $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} f(n) = \boxed{\text{エ}}$ である．

－余白（計算用紙）－

【5】 以下の問に答えよ．

関数 $f(x)$ は微分可能とする．$f_1(x) = f(x)$ および $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ $(n = 2, 3, \cdots)$ によって関数 $f_n(x)$ を定義する．

(1) $f_2(x_0) = x_0$ を満たす実数 x_0 が存在するとする．このとき，$f_2'(x_0) = f_2'(f(x_0))$ が成り立つことを示せ．

(2) 3 以上のある整数 n に対し，$f_n(x_0) = x_0$ を満たす実数 x_0 が存在するとする．また，$x_k = f_k(x)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ とおく．このとき，

$$f_n'(x_0) = f_n'(x_1) = \cdots = f_n'(x_{n-1})$$

が成り立つことを示せ．ただし，任意の正の整数 a, b に対して $f_{a+b}(x) = f_a(f_b(x))$ であることを使ってもよい．

－余白（計算用紙）－