奈良県立医科大学 推薦

平 成 29 年 度

試 験 問 題 ①

学 科 試 験

（9時～12時）

【注 意】

1. **試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中をみてはならない．**
2. 試験教科，試験科目，ページ，解答用紙および選択方法は下表のとおりである．

教 科	科 目	ページ	解答用紙数	選 択 方 法
数 学	数 学	1 ～ 14	1 枚	数学，英語は**必須解答**とする． 理科は左の**3科目のうちから1科目**を選択せよ．
英 語	英 語	15 ～ 18	2 枚	
理 科	化 学	19 ～ 30	2 枚	
	生 物	31 ～ 46	5 枚	
	物 理	47 ～ 56	1 枚	

3. **監督者の指示**に従って，選択しない理科科目を含む**全解答用紙**(11 枚)に受験番号と選択科目(理科のみ)を記入せよ．
   ① **受験番号欄に受験番号**を記入せよ．
   ② **理科は選択科目記入欄に選択する1科目**を○印で示せ．
   上記①，②の記入がないもの，および理科2科目または理科3科目選択した場合は**答案全部を無効**とする．
4. 解答はすべて解答用紙の対応する場所に記入せよ．
5. 問題冊子の余白を使って，計算等を行ってもよい．
6. 試験開始後，問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせよ．
7. 解答用紙はいずれのページも**切り離してはならない．**
8. **解答用紙は持ち帰ってはならない．** 問題冊子は持ち帰ってよい．

数 学

【1】 以下の文章の空欄に適切な数, 式または数学記号を入れて文章を完成させよ.

実数全体で定義された x の関数

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

と正の実数 a を含む関数

$$g(x)=x^2-\frac{1}{a}\log(e^{ax}+e^{-ax})$$

を考える.

(1) $f'(x)$ が取り得る値の範囲は $\boxed{\text{ア}} < f'(x) \leqq \boxed{\text{イ}}$ で, $f(x)$ が取り得る値の範囲は $\boxed{\text{ウ}} < f(x) < \boxed{\text{エ}}$.

(2) $g'(x)$ を f と a と x を用いて書くと $g'(x)=2x-\boxed{\text{オ}}$. また, $0<a<\boxed{\text{カ}}$ のとき, $g(x)$ が極小となる点の個数は $\boxed{\text{キ}}$. $a>\boxed{\text{カ}}$ のとき, $g(x)$ が極小となる点の個数は $\boxed{\text{ク}}$.

－余白（計算用紙）－

【2】 以下の文章の空欄に適切な数, 式または数学記号を入れて文章を完成させよ.

条件

$$a_0 = p, \quad a_1 = q, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \quad (n \geqq 0)$$

によって定まる数列 $\{a_n\}$ を考える. ただし, p, q は $p^2 + q^2 \neq 0$ なる実数である. この数列の一般項は $a_n = \boxed{\text{ア}}$ $(n \geqq 0)$ と書ける. このとき,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \log\left(a_n^2 + 1\right) = \begin{cases} \boxed{\text{イ}} & \left(\boxed{\text{エ}} \neq 0 \text{ の場合}\right) \\ \boxed{\text{ウ}} & \left(\boxed{\text{エ}} = 0 \text{ の場合}\right) \end{cases}$$

となる.

－余白（計算用紙）－

【3】 以下の問いに答えよ．ただし，答のみ記入すればよい．

方程式

$$5z^4 - 12z^3 + 30z^2 - 12z + 5 = 0$$

は $1 + 2i$ を解としてもつ．ただし，i は虚数単位とする．その他 3 個の解を $a + bi$ $(a, b$ は実数$)$ の形で求めよ．

－余白（計算用紙）－

【4】 以下の文章の空欄に適切な数, 式または数学記号を入れて文章を完成させよ.

初めに黒石を 4 個と白石を 4 個用意する. 次に袋を 4 つ用意し, それぞれの袋に黒石白石の区別なしに石を 2 個ずつ入れ, すべての袋を大きな箱に入れる. 以下の操作 T を考える.

操作 T: 箱の中から袋を 2 つ取り出し, それらの袋の中の石を一旦片方の袋にすべて集める. 石を十分に混ぜた後, 石を 2 個取り出し, 他方の袋に入れる.

操作 T によって, 黒石と白石とが 1 個ずつ入っている袋の数 N は, 変動しないか, 2 増減する可能性がある. N は 0, 2, 4 のいずれかで, その変化する様子は以下の通りである.

- $N = 0$ の状態に操作 T を施した後, $N = 2$ になる確率は $\boxed{\text{ア}}$.
- $N = 2$ の状態に操作 T を施した後, $N = 0$ になる確率は $\boxed{\text{イ}}$ で $N = 4$ になる確率は $\boxed{\text{ウ}}$.
- $N = 4$ の状態に操作 T を施した後, $N = 2$ になる確率は $\boxed{\text{エ}}$.

－余白（計算用紙）－

【5】 以下の問いに答えよ．ただし，答のみ記入すればよい．

全体集合 U は有限個の要素からなる．また，A, B, C を U の部分集合とする．これら集合の要素の個数について，次のことが分かっている．

$$\begin{cases} A\text{ に含まれない要素の個数は }51. \\ B\text{ に含まれない要素の個数は }36. \\ C\text{ に含まれない要素の個数は }55. \\ A\text{ または }B\text{ に含まれる要素の個数は }54. \\ B\text{ または }C\text{ に含まれる要素の個数は }49. \\ B\text{ に含まれるが，}A\text{ にも }C\text{ にも含まれない要素の個数は }23. \\ A\text{ にも }C\text{ にも含まれる要素の個数は }0. \end{cases}$$

このとき，U の要素の個数を求めよ．

－余白（計算用紙）－

【6】 以下の文章の空欄に適切な数, 式または数学記号を入れて文章を完成させよ. ただし, (ア) と (ソ) には数学用語を入れよ. また, (イ) と (ウ) には本文中にある θ を使ってはならない. (サ) には2個の適切な数式を入れよ.

空間内に相異なる定点 O, P, Q を取り, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}, \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をそれぞれ $\vec{p}, \vec{q}$ で表す. $\vec{p}, \vec{q}$ は互いに平行ではないとする. θ を実数全体を動く媒介変数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \cos\theta\,\vec{p} + \sin\theta\,\vec{q}$$

を考える. 以下では $\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と表す. まず, この動点 R の軌跡は3点 O, P, Q で定まる平面内の曲線である. さらに, θ の値が 2π だけ変化すると, 動点 R は元の位置に戻ってくる. したがって, $\vec{r}$ の長さ $|\vec{r}|$ には最大値と最小値が存在する. もし最大値と最小値が一致するなら, この曲線は $\boxed{\text{ア}}$ になる. 以下では最大値と最小値が一致しない場合を考える. $\vec{r}$ の長さの平方を計算するにあたって, まず定数 a, b, c を次のように定める.

$$a = |\vec{p}|^2 - |\vec{q}|^2, \quad b = 2\vec{p}\cdot\vec{q}, \quad c = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2.$$

ここで, もし $a = b = 0$ ならば $|\vec{r}|$ は一定となり, 最大値と最小値が一致しないという仮定に反するので, 今の場合 $a^2 + b^2 \neq 0$ であることが分かる. そこで定数 α を次のように定める.

$$\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

これらの定数と媒介変数 θ とを用いて, $|\vec{r}|^2$ を表すと, $|\vec{r}|^2 = \boxed{\text{イ}} + \boxed{\text{ウ}}\sin(\boxed{\text{エ}})$. したがって一般的に, $|\vec{r}|$ が最大値をとるのは $\theta = \boxed{\text{オ}} + n\pi$ (n は整数) のときであり, 最小値をとるのは $\theta = \boxed{\text{カ}} + n\pi$ (n は整数) のときである. θ の値が 2π だけ変化するあいだに, $|\vec{r}|$ が最大値, 最小値をとるのは, それぞれ2度あるが, $|\vec{r}|$ が最大となるときの $\vec{r}$ の一方を $\vec{A}$, また $|\vec{r}|$ が最小となるときの $\vec{r}$ の一方を $\vec{B}$ で表すと, たとえば, $\vec{A} = \boxed{\text{キ}}\,\vec{p} + \boxed{\text{ク}}\,\vec{q}$, $\vec{B} = \boxed{\text{ケ}}\,\vec{p} + \boxed{\text{コ}}\,\vec{q}$. $|\vec{r}|$ が最大, 最小となる他方のベクトル $\vec{r}$ は $\vec{A}, \vec{B}$ を使ってそれぞれ $\boxed{\text{サ}}$ のように表される. ここで $\vec{A}, \vec{B}$ の内積を計算すると, $\vec{A}\cdot\vec{B} = \boxed{\text{シ}}$. θ の代わりに新たな媒介変数 ϕ を $\phi = \theta + k$ (k は定数) の形で導入して $\phi = 0$ のとき $\vec{r} = \vec{A}$ となるように k を定めると, $\vec{r}$ は媒介変数 ϕ を使って $\vec{r} = \boxed{\text{ス}}\,\vec{A} + \boxed{\text{セ}}\,\vec{B}$ と表せる. 曲線の形は媒介変数のとり方によらないので, この式の形から問題の曲線は $\boxed{\text{ソ}}$ であることが分かる.

－余白（計算用紙）－

－余白（計算用紙）－

－余白（計算用紙）－