奈良県立医科大学 後期

平成31年度

試験問題

数　　学

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開いてはならない.

2. 試験開始後, 問題冊子, 解答用紙の印刷不鮮明や汚れ, 問題冊子の落丁・乱丁等に気付いたときは, 手を挙げて監督者に知らせよ.

3. 監督者の指示に従い, 解答用紙の受験番号欄に受験番号を記入せよ. 受験番号欄は合計4箇所ある. 受験番号未記入の解答用紙は採点されない.

4. 解答は所定の解答欄に記入せよ. 不足する場合は裏面に解答してもよい. 解答用紙はどのページも切り離してはならない.

5. 試験時間は2時間である.

6. 試験終了後, 問題冊子は持ち帰ってよい.

ー余白ー
(このページに問題はありません)

1 実数 r に対して, r を越えない最大の整数を $[r]$ と表す.

(1) ‘正の実数 p に対して, 2次方程式 $x^2+2[p]x+[p^2]=0$ が相異なる2個の実数解を持つことは起こり得ない’ ことを証明せよ.

(2) 正整数 n に対し, $k \geqq n$ であって以下の条件 (G) をみたす実数 k 全体のなす集合を T_n とする.

- 条件 **(G)**: 2次方程式 $x^2+2[k]x+[k^2]=0$ は実数解を持たない.

T_n の要素で最小のものを n を用いて表示せよ.

2 区間 $0 \leqq x \leqq 1$ で定義された連続関数 $f(x)$ は以下の2条件をみたすものとする.

- 条件 (i) : 任意の $0 \leqq x \leqq 1$ に対して $f(x) \geqq 0$.
- 条件 (ii) : 任意の $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$ に対して, $f(\alpha) > f(\beta)$.

(1) 任意の $0 \leqq p < q \leqq 1$ に対して, 以下の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$\int_p^q f(x)dx > 0.$$

(2) n を正整数とする. 任意の $0 < b < 1$ に対して, 以下の二つの不等式が成り立つことを証明せよ.

(i) $\int_0^1 f(x)^n dx > bf(b)^n$.

(ii) $\int_b^1 f(x)^n dx < (1-b)f(b)^n$.

(3) 任意の $0 < a < 1$ に対して, 以下の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^a f(x)^n dx}{\int_0^1 f(x)^n dx} = 1.$$

3 $i=\sqrt{-1}$ を虚数単位とし, 集合 M を以下で定義する：

$$M=\{z=a+bi \mid a,b\text{ は整数}\}.$$

(1) M に属する複素数 $z=a+bi$ (a,b は整数) について,

$$\frac{z}{i-1}\in M$$

となるために a,b がみたすべき必要十分条件を求めよ.

(2) M に属する複素数 z で,

$$\frac{z-1}{i-1}\in M,\text{ かつ }\left|\frac{z-1}{i-1}\right|\geqq|z|$$

となるようなものを全て求めよ.

(3) M に属する 0 でない任意の複素数 z は, 0 以上の整数 d, および 0 以上 1 以下の整数 a_j $(j=0,1,\cdots,d)$, ただし $a_d=1$ を用いて,

$$z=\sum_{j=0}^{d}a_j(i-1)^j$$

の形にただ一つの方法で表せることを証明せよ.

4 n を 2 以上の整数とする. 1 から n までの相異なる n 個の整数を横一列に並べて得られる順列 σ に対して, 左から j 番目の数字を $\sigma(j)$ と記す. このとき $\sigma(j)=j$ をみたす整数 j $(1\leqq j\leqq n)$ の個数を $F(\sigma)$ とする. さらに 1 から n までの順列 σ 全体のなす集合を S とする. 順列 σ が S 全体を動くとき, $F(\sigma)$ の総和 $\sum_{\sigma\in S}F(\sigma)$ を n を用いて表せ.

ー余白ー

(このページ以降に問題はありません)