奈良県立医科大学 後期

平成30年度

試験問題

数　　学

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．

2. 試験開始後，問題冊子，解答用紙の印刷不鮮明や汚れ，問題冊子の落丁・乱丁等に気付いたときは，手を挙げて監督者に知らせよ．

3. 監督者の指示に従い，解答用紙の受験番号欄に受験番号を記入せよ．受験番号欄は合計4箇所ある．受験番号未記入の解答用紙は採点されない．

4. 解答は所定の解答欄に記入せよ．不足する場合は裏面に解答してもよい．解答用紙はどのページも切り離してはならない．

5. 試験時間は2時間である．

6. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってよい．

ー余白ー

(このページに問題はありません)

1 3つのサイコロがある．1つめは$1,2,3,4,5,6$が各面にひとつずつ書かれた普通のサイコロである．2つめは$2,4,6$が書かれた面が2つずつある偶数サイコロである．3つめは$1,3,5$が書かれた面が2つずつある奇数サイコロである．いずれのサイコロについても，6つの面のそれぞれに1つの整数が書かれており，サイコロを振ったときにどの面が出るかは同様に確からしいとする．このとき，次のような試行を考える．

試行: 普通のサイコロを3回振り，出た面に書かれた3つの整数の積を計算する．その積が奇数であれば奇数サイコロを，偶数であれば偶数サイコロを選ぶ．選ばれたサイコロを2回振り，出た面に書かれた2つの整数の和をNとする．

(1) この試行においてNが10となる確率を求めよ．

(2) ‘Nが10であったとき，最初に振る3回の内，1回目の普通のサイコロの出た面に書かれた整数が1である’という条件付き確率を求めよ．

2 nを1より大きい整数とする．このとき，以下の条件を満たす0以上の整数rがただ一つ定まる：

条件：nは2^rで割り切れるが，2^{r+1}では割り切れない．

(1) 1以上n以下の任意の整数iに対して，2項係数${}_{2n}\mathrm{C}_{2i-1}$は2^{r+1}で割り切れることを証明せよ．

(2) n個の2項係数${}_{2n}\mathrm{C}_{2i-1}$ $(i=1,2,\cdots,n)$の最大公約数は2^{r+1}であることを証明せよ．

3 n を 3 以上の整数とし, 半径 1 の円 C に内接する正 n 角形の n 個の頂点を反時計回りの順に $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$ とする. 更に $0 \leqq i < j \leqq n-1$ を満たす整数の組 (i, j) 全体のなす集合を S とする. (i, j) が S 全体を動くとき, 相異なる 2 個の頂点 P_i, P_j を結ぶ線分 P_iP_j の長さの二乗の総和

$$\sum_{(i,j)\in S} \overline{P_iP_j}^2$$

を求めよ.

4 実数全体で定義された関数 $\varphi(x)$ が条件 (C) を満たすとは, 以下が成り立つこととする:

- 条件 (C) : 任意の実数 $u < v$ に対して正の実数 ρ が存在し, x が $u \leqq x \leqq v$ の範囲を動くとき, 不等式 $|\varphi(x)| < \rho$ が成り立つ.

(1) $f(x)$ は実数全体で定義された関数であり, 条件 (C) を満たすとする. 更に 1 より大きい実数 a が存在し, 任意の実数 x に対して不等式

$$f(ax) < af(x)$$

が成り立つとする. このとき, '任意の正整数 n と任意の実数 x について不等式

$$f(x) < a^n f(a^{-n}x)$$

が成り立つ' ことを証明せよ. 更に, '正の実数 p と正の実数 q とが存在し, 任意の実数 x に対して不等式

$$f(x) < p|x| + q$$

が成り立つ' ことを証明せよ.

(2) $g(x)$ は実数全体で定義された関数であり, 条件 (C) を満たすとする. 更に実数 β, γ, および 1 より大きい実数 α が存在し, 任意の実数 x に対して不等式

$$g(\alpha x + \beta) < \alpha g(x) + \gamma$$

が成り立つとする. このとき, '正の実数 k と正の実数 ℓ とが存在し, 任意の実数 x に対して不等式

$$g(x) < k|x| + \ell$$

が成り立つ' ことを証明せよ.