奈良県立医科大学 後期

平成 29 年度

試験問題

数　学

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 試験開始後，問題冊子，解答用紙の印刷不鮮明や汚れ，問題冊子の落丁・乱丁等に気付いたときは，手を挙げて監督者に知らせよ．
3. 監督者の指示に従い，解答用紙の受験番号欄に受験番号を記入せよ．受験番号欄は合計 4 箇所ある．受験番号未記入の解答用紙は採点されない．
4. 解答は所定の解答欄に記入せよ．表面で不足する場合は裏面に解答してもよい．解答用紙はどのページも切り離してはならない．
5. 試験時間は 2 時間である．
6. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってよい．

―余白―

(このページに問題はありません)

1 $f(x)$ は実数全体で定義された連続関数であり, すべての実数 x に対して以下の関係式を満たすとする.

$$\int_0^x e^t f(x-t)dt = f(x) - e^x \ .$$

関数 $f(x)$ を求めよ.

2 S を $a+b\sqrt{2}$ (但し a, b は整数) の形に表される数すべての集合とする. S に属する任意の数 $z = a+b\sqrt{2}$ (但し a, b は整数) に対して, $N(z) = a^2 - 2b^2$ とおく.

(1) S に属する任意の数 z, w に対して, $z+w \in S, zw \in S$ かつ $N(zw) = N(z)N(w)$ が成り立つことを証明せよ.

(2) S に属する零でない数 $z = x + y\sqrt{2}$ (x, y は整数) の逆数 z^{-1} が S に属する為の必要十分条件は, $x^2 - 2y^2 = 1, -1$ であることを証明せよ.

(3) $1 < z < 1+\sqrt{2}$ を満たすような S の数 z で, その逆数 z^{-1} も S に属するものは存在しないことを証明せよ.

(4) S に属する零でない数 z で, その逆数 z^{-1} も S に属するものはすべて $(1+\sqrt{2})^n, -(1+\sqrt{2})^n$ (n は整数) によって与えられることを証明せよ.

3 n を 3 以上の整数とする．半径 $r(>0)$ の円 C に内接する正 n 角形の n 個の頂点を反時計回りの順に $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$ とおく．点 Q が円 C の周上を動くとき，n 個の線分 $QP_0, QP_1, \cdots, QP_{n-1}$ の長さの積 $L(Q)$ が最大となるような点 Q の位置，及び $L(Q)$ の最大値を求めよ．

4 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ を実数の数列とする．ある正整数 p が存在し，

$$|m-n| \leqq p$$

を満たす零以上のすべての整数 m, n に対して，不等式 $|a_m - a_n| < 1$ が成り立つとする．このとき，ある正の実数 α, β が存在し，零以上の任意の整数 n に対して不等式

$$|a_n| < \alpha n + \beta$$

が成り立つことを証明せよ．

－余白－

(このページ以降に問題はありません)