奈良県立医科大学　後期

平成28年度

試験問題

数　　学

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない.
2. 試験開始後，問題冊子，解答用紙の印刷不鮮明や汚れ，問題冊子の落丁・乱丁等に気付いたときは，手を挙げて監督者に知らせよ.
3. 監督者の指示に従い，解答用紙の受験番号欄に受験番号を記入せよ．受験番号欄は合計4箇所ある．受験番号未記入の解答用紙は採点されない.
4. 解答は所定の解答欄に記入せよ．表面で不足する場合は裏面に解答してもよい．解答用紙はどのページも切り離してはならない.
5. 試験時間は2時間である.
6. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってよい.

－余白－

(このページに問題はありません)

I xy 平面上の点で, x 座標, y 座標がともに整数である点を格子点という. xy 平面内の多角形 S に対し, S に含まれる格子点の個数を $n(S)$ と表す. (但し, S の辺上にある格子点も数えるものとする.) 以下の多角形 S に対して, $n(S)$ を求めよ.

(1) $(0,0),(11,0),(0,10)$ を頂点とする三角形.

(2) a,b は $a>b$ を満たす正整数とし, その最大公約数を d とおく. このとき, $(0,0),(0,2b),(a,b),(a-b,0)$ を頂点とする四角形.

II 実数 a に対して以下の条件 (F) を考える.

- 条件 (F) : 不等式 $\lceil \cos x \cos y \rceil < a - \sin x \sin y$ が任意の実数 x,y に対して成り立つ.

  但し, 実数 r に対して $\lceil r \rceil$ は r 以上の整数の中で最小のものを表す.

(1) $a \geqq 2$ ならば, a は条件 (F) を満たすことを証明せよ.

(2) 条件 (F) を満たす実数 a の中で, $a=2$ は最小であることを証明せよ.

III k は 1 より大きい整数で, n と j は不等式 $1+j(k-1) \leqq n$ を満たす正整数である. このとき, k 個の正整数からなる数列 $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ のうち, 以下の 2 条件を両方とも満たす数列の個数を求めよ.

- 条件 (i): $a_k \leqq n$
- 条件 (ii): 各 $i\,(1 \leqq i \leqq k-1)$ に対して $a_{i+1} - a_i \geqq j$

IV $f(z)$ は複素数平面全体で定義された関数であり, 以下の条件 (N) を満たすものとする.

- 条件 (N) : $\mathrm{Re}\left(f(z)\overline{f(w)}\right) = \mathrm{Re}\,(z\overline{w})$ が任意の複素数 z, w に対して成り立つ.

(但し, 複素数 α に対して, $\mathrm{Re}\,\alpha$ は α の実部を, $\overline{\alpha}$ は α の共役複素数を表す.)

(1) 複素数 z の絶対値が 1 ならば, $f(z)$ の絶対値も 1 であることを証明せよ.

(2) 以下の等式を証明せよ.

(a) 任意の複素数 z, w に対して $f(z+w) = f(z) + f(w)$ が成り立つ.

(b) 任意の実数 r と任意の複素数 z に対して $f(rz) = rf(z)$ が成り立つ.

(3) 絶対値が 1 の複素数 a を用いて,

$$f(z) = az \text{ または } f(z) = a\overline{z}$$

と表せることを証明せよ.