奈良県立医科大学 後期

平成27年度

試験問題

数　　学

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．

2. 試験開始後，問題冊子，解答用紙の印刷不鮮明や汚れ，問題冊子の落丁・乱丁等に気付いたときは，手を挙げて監督者に知らせよ．

3. 監督者の指示に従い，解答用紙の受験番号欄に受験番号を記入せよ．受験番号欄は合計4箇所ある．受験番号未記入の解答用紙は採点されない．

4. 解答は所定の解答欄に記入せよ．表面で不足する場合は裏面に解答してもよい．解答用紙はどのページも切り離してはならない．

5. **問IVについては**, 問IV-1(新課程用), 問IV-2(旧課程用) の二つの内からいずれか一つを選択し, **解答用紙4ページ目・上部の選択問題記入欄において選択する問題に○印を付して解答せよ**. 平成27年度に高等学校を卒業見込みの者, および平成26年度以前に高等学校を卒業した者が**問IV-1(新課程用), または 問IV-2(旧課程用) のいずれを選択しても差し支えない**. ただし, 問IV-1(新課程用), 問IV-2(旧課程用) の両方を選択した答案は無効となる．

6. 試験時間は2時間である．

7. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってよい．

－余白－

(このページに問題はありません)

I　x を実数とし, 0 以上の任意の整数 n に対して, 定積分

$$I_n(x) = \int_0^x t^n e^t dt$$

を考える.

(1) $I_n(x)$ は, 定数 a_n, および最高次の係数を 1 とする x の n 次式 $f_n(x)$ を用いて,

$$I_n(x) = f_n(x)e^x + a_n$$

の形に, ただ一通りの方法で表せることを証明せよ.

(2) a_n を n を用いて表せ.

(3) 正整数 n に対して,

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f_i(x)}{i!}$$

とおく. (ただし, $0! = 1$ とする.) このとき, $S_n(x) + S_{n-1}(x)$ を求めよ.

II a, b は共に 1 より大きい実数の定数とする. xy 平面において原点 O $(0, 0)$ を中心とする半径 1 の円を C とし, 2 点 $(a, 0), (0, b)$ を通る直線を ℓ とする.

(1) 円 C と直線 ℓ とが交わらない為に, 定数 a, b の満たすべき必要十分条件を求めよ.

(2) さらに (1) の仮定の下で, 直線 ℓ 上の点 P を通り円 C と接する 2 本の接線の C における接点を, 各々A, B とおく. 点 P が直線 ℓ 上を動くとき, 四角形 PAOB の面積 S を最小にするような点 P の座標, および S の最小値を求めよ.

III aを2以上の整数, pを2より大きい素数とする. ある正整数kに対して等式

$$a^{p-1}-1=p^k$$

が成り立つのは, $a=2, p=3$ の場合に限ることを証明せよ.

IV-1 (新課程用) nを3以上の整数とし, 複素数zを

$$z=\cos(2\pi/n)+i\sin(2\pi/n), i=\sqrt{-1}$$

と定める. $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ が1からnまでの全ての整数を動くとき, 関数 $v=(a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1})^n$ の取りうる全ての値のなす集合をSとおく. さらに, $b_0, b_1, \cdots, b_{n-2}$ が0から$n-1$までの全ての整数を動くとき, 関数 $w=(b_0+b_1z+\cdots+b_{n-2}z^{n-2})^n$ の取りうる全ての値のなす集合をTとおく.

(1) 複素数 $1+z+\cdots+z^{n-1}$ の値を求めよ.

(2) 二つの集合SとTとは等しいこと, すなわち$S=T$が成り立つことを証明せよ.

IV-2 (旧課程用) nを3以上の整数とし, 2行2列の行列Rを,

$$R=\begin{pmatrix}\cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n)\\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n)\end{pmatrix}$$

と定める. Eを2行2列の単位行列とする. $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ が1からnまでの全ての整数を動くとき, 行列 $(a_0E+a_1R+\cdots+a_{n-1}R^{n-1})^n$ 全体のなす集合をSとおく. さらに, $b_0, b_1, \cdots, b_{n-2}$ が0から$n-1$までの全ての整数を動くとき, 行列 $(b_0E+b_1R+\cdots+b_{n-2}R^{n-2})^n$ 全体のなす集合をTとおく.

(1) 行列 $E+R+R^2+\cdots+R^{n-1}$ を求めよ.

(2) 二つの集合SとTとは等しいこと, すなわち$S=T$が成り立つことを証明せよ.

―余白―

(このページ以降に問題はありません)