奈良県立医科大学 後期

平成26年度

試験問題

数　学

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．

2. 試験開始後，問題冊子，解答用紙の印刷不鮮明や汚れ，問題冊子の落丁・乱丁等に気付いたときは，手を挙げて監督者に知らせよ．

3. 監督者の指示に従い，解答用紙の受験番号欄に受験番号を記入せよ．受験番号欄は合計4箇所ある．受験番号未記入の解答用紙は採点されない．

4. 解答は所定の解答欄に記入せよ．表面で不足する場合は裏面に解答してもよい．解答用紙はどのページも切り離してはならない．

5. 試験時間は2時間である．

6. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってよい．

◇M3(739—88)

－余白－

(このページに問題はありません)

I 実数全体で連続な関数 $f(x)$ が, 任意の実数 x に対して関係式

$$\int_0^x t\,f(x-t)\,dt = e^x - x - 1$$

を満たすとする. このとき, 関数 $f(x)$ を求めよ.

II

(1) n を正整数とし, $2n$ 個の実数 $x_1, \cdots, x_n,\ y_1, \cdots, y_n$ をとる. t の関数

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} (t\,x_i + y_i)^2$$

は, どのような実数 t に対しても $f(t) \geqq 0$ であることを用いて, 任意の実数 $x_1, \cdots, x_n,\ y_1, \cdots, y_n$ に対して次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2\right) \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i\right)^2$$

(2) n を正整数とする. 任意の正の実数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{{x_i}^2} \geqq \frac{n^3}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

(3) ある正整数 n を一つ固定しておき, 実数 a に対して次の条件 (N) を考える.

- 条件 (N) : 不等式 $a + \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{{x_i}^2}\right] > \frac{n^3}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$

  が, n 個の任意の正の実数 $x_1, \cdots, x_n$ に対して成り立つ.
  (ただし, 実数 r に対して r を越えない最大の整数を $[r]$ と表す.)

このとき, 条件 (N) を満たす実数 a の中で $a = 1$ は最小であることを証明せよ.

III xy 平面上で方程式 $xy=1$ により与えられた曲線を C,
方程式 $x^2-y^2=1$ により与えられた曲線を D とする.

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

をすべての成分が実数からなる2行2列の行列とし, A によって定まる xy 平面の一次変換を φ とおく.

(1) C 上のどのような点も φ によって D 上の点に移るために, A の成分 a,b,c,d の満たすべき必要十分条件を求めよ.

(2) (1) の仮定の下で, さらに $\varphi(P)=P$ となる C 上の点 P が存在するとき, 行列 A, 及び点 P の座標を求めよ.

IV k と n は, $1 \leqq k \leqq n$ を満たす正整数とする. このとき, k 個の正整数からなる列 $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ で, 以下の2条件をすべて満たすものはいくつあるか. k と n を用いて表せ.

- 条件 (1) : $1 \leqq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leqq n$
- 条件 (2) : 各 i $(1 \leqq i \leqq k)$ に対して $a_i - i$ は偶数である.

－余白－

(このページ以降に問題はありません)