奈良県立医科大学 後期

平成 25 年度

試験問題

数　　学

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない.
2. 試験開始後，問題冊子，解答用紙の印刷不鮮明や汚れ，問題冊子の落丁・乱丁等に気付いたときは，手を挙げて監督者に知らせよ.
3. 監督者の指示に従い，解答用紙の受験番号欄に受験番号を記入せよ．受験番号欄は合計 4 箇所ある．受験番号未記入の解答用紙は採点されない.
4. 解答は所定の解答欄に記入せよ．表面で不足する場合は裏面に解答してもよい．解答用紙はどのページも切り離してはならない.
5. 試験時間は 2 時間である.
6. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってよい.

－余白－

(このページに問題はありません)

I 実数全体で定義された微分可能な関数 $f(x)$ で, 関係式

$$f'(x) = \cos x + \int_{-\pi}^{\pi} t\, f(t)\, dt$$

を満たし, かつ $f(0)=0$ となるものを求めよ.
(ただし, $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す.)

II a, b を整数とし, 2 行 2 列の行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

とおく. xy 平面上のベクトルの列 $\left\{ \overrightarrow{v_n} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\}_{n=1,2,\cdots}$ を次の漸化式により定義する.

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_{n+1}} = A\,\overrightarrow{v_n} + \overrightarrow{v_1} \quad (n \geqq 1) \ .$$

さらに 1 より大きいある整数 k に対して $\overrightarrow{v_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が成り立つと仮定する.

(1) $b=1$, または -1 であることを証明せよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |\,x_n\,| = +\infty$ となることは起こり得ないことを証明せよ.

(3) もし $b=-1$ ならば $a=0$ であることを証明せよ.

(4) $|\,a\,| < 2$ を証明せよ.

III pを0でない実数とする. xy平面において, 曲線 $y = x^3 + px + p$ の接線で点 $(1,1)$ を通るものが, ちょうど2本存在すると仮定する. このとき, 実数pの値, および2本の接線の方程式を求めよ.

VI

(1) 1より大きい正整数pが素数ならば, $p-1$以下の任意の正整数iに対して, 二項係数${}_pC_i$はpの倍数であることを証明せよ.

(2) 1より大きい正整数pが素数ならば, 任意の正整数nに対して整数 ${}_{np}C_p - n$ はpの倍数であることを証明せよ.

(3) 1より大きい相異なる正整数p, qをともに素数とし, kを正整数とする. このとき, 整数 ${}_{kpq}C_q - p$ がqの倍数であり, かつ整数 ${}_{kpq}C_p - q$ がpの倍数であるための必要十分条件は, 整数$k-1$がpqの倍数であることを証明せよ.

(4) 1より大きい正整数pが素数ならば, p以上の任意の正整数mに対して, 整数 ${}_mC_p - [\,mp^{-1}\,]$ はpの倍数であることを証明せよ. (ただし, 実数xに対してxを越えない最大の整数を$[x]$で表す.)

－余白－

(このページ以降に問題はありません)