奈良県立医科大学 一般 前期

平成24年度

試験問題

数　　学

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 試験開始後，問題冊子，解答用紙の印刷不鮮明や汚れ，問題冊子の落丁・乱丁等に気付いたときは，手を挙げて監督者に知らせよ．
3. 監督者の指示に従い，解答用紙の受験番号欄に受験番号を記入せよ．受験番号欄は合計4箇所ある．受験番号未記入の解答用紙は採点されない．
4. 解答は所定の解答欄に記入せよ．表面で不足する場合は裏面に解答してもよい．解答用紙はどのページも切り離してはならない．
5. 試験時間は2時間である．
6. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってよい．

－余白－

(このページに問題はありません)

I 実数 p, q に対して, x の3次関数 $f_{p,q}(x)$ を $f_{p,q}(x) = x^3 + px + q$ によって定める. 実数 p, q は, 3次関数 $f_{p,q}(x)$ が以下の3条件を満たすような範囲を動くとする.

条件 (1) : $f_{p,q}(1) = 1$.

条件 (2) : $f'_{p,q}(0) < 0$ (ただし, $f'_{p,q}(x)$ は $f_{p,q}(x)$ の導関数を表す.)

条件 (3) : $x \geqq 0$ のとき, $f_{p,q}(x) \geqq 0$.

このとき, 定積分

$$I(p, q) = \int_0^1 f_{p,q}(x)\,dx$$

を最大にするような p, q の値, および $I(p, q)$ の最大値を求めよ.

II n を3以上の整数とし, n 個の整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ は以下の3条件を満たすとする.

条件 (1) : $a_1 \geqq 2$.

条件 (2) : $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$.

条件 (3) : $1 \leqq i < j \leqq n$ を満たす任意の整数 i, j に対して, 不等式

$$a_i + a_j > 0$$

が成り立つ.

このとき, 不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geqq n$$

が成り立つことを証明せよ. また, この不等式において等号が成り立つ場合の n の値, および n 個の整数の組 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ をすべて求めよ.

III 各成分が0以下の整数からなる2行2列の行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

で, $A^2 + A = E$ を満たすものをすべて求めよ.
(ただし, E は単位行列を表す.)

IV 整数 m が与えられたとき, x に関する整数係数の2つの整式 $f(x), g(x)$ が関係式

$$f(x) \equiv g(x) \pmod{m}$$

を満たすとは, 等式 $f(x) - g(x) = m\,h(x)$ を満たすような整数係数の整式 $h(x)$ が存在することである.

(1) $f(x), g(x), F(x), G(x)$ を整数係数の整式とする. もし, ある整数 m について関係式 $f(x) \equiv g(x) \pmod{m}$, かつ $F(x) \equiv G(x) \pmod{m}$ が満たされるならば, 関係式 $f(x) + F(x) \equiv g(x) + G(x) \pmod{m}$, かつ $f(x)\,F(x) \equiv g(x)\,G(x) \pmod{m}$ が満たされることを証明せよ.

(2) 正整数 $p\,(>1)$ を素数とする. p より小さい任意の正整数 i に対して二項係数 ${}_pC_i$ は p の倍数であることを証明せよ.

(3) 正整数 $p\,(>1)$ を素数とする. 任意の正整数 n について, 関係式

$$(1+x)^{p^n} \equiv 1 + x^{p^n} \pmod{p}$$

が満たされることを証明せよ.

(4) 正整数 $p\,(>1)$ を素数とし, n を2以上の正整数とする. $n-1$ 個の二項係数 ${}_nC_i\ (1 \leqq i \leqq n-1)$ がすべて p の倍数であるための必要十分条件は, 整数 n が素数 p の正べきである (すなわち, 適当な正整数 k を用いて $n = p^k$ と表せる) ことを証明せよ.

－余白－

(このページ以降に問題はありません)