奈良県立医科大学一般 前期

平成23年度

試験問題

数　　学

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 試験開始後，問題冊子，解答用紙の印刷不鮮明や汚れ，問題冊子の落丁・乱丁等に気付いたときは，手を挙げて監督者に知らせよ．
3. 監督者の指示に従い，解答用紙の受験番号欄に受験番号を記入せよ．受験番号欄は合計4箇所ある．受験番号未記入の解答用紙は採点されない．
4. 解答は所定の解答欄に記入せよ．表面で不足する場合は裏面に解答してもよい．解答用紙はどのページも切り離してはならない．
5. 試験時間は2時間である．
6. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってよい．

一余白一

(このページに問題はありません)

I 0以上の任意の整数 i に対して, x の i 次式 $g_i(x)$ を

$$i=0 \text{ のとき } g_0(x)=1,\ i \geqq 1 \text{ のとき } g_i(x)=\frac{x(x+1)\cdots(x+i-1)}{i\,!}$$

と定義する.

(1) $f(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ (但し $a_n \neq 0$) を x に関する実数係数の $n\,(\geqq 0)$ 次式とする. このとき, 等式 $f(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n} c_i\, g_i(x)$ が任意の実数 x について成り立つような実数 c_i ($0 \leqq i \leqq n$, 但し $c_n \neq 0$) が一意的に存在することを証明せよ.

(2) (1) において, $n>0$ のとき等式 $f(x)-f(x-1)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i\, g_{i-1}(x)$ が成り立つことを証明せよ.

(3) $F(x)$ ($\neq 0$) を x に関する実数係数の $n\,(\geqq 0)$ 次式とし, 任意の整数 a に対して $F(a)$ が整数であると仮定する. このとき, 等式 $F(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n} d_i\, g_i(x)$ が任意の実数 x について成り立つような整数 d_i ($0 \leqq i \leqq n$, 但し $d_n \neq 0$) が一意的に存在することを証明せよ.

II 実数の数列 $\{a_n\}_{n=1,\,2,\,\cdots}$ は, 任意の正整数 p, q に対して不等式

$$|\,a_{p+q}-a_p-a_q\,|<1$$

を満たしているとする.

(1) 任意の正整数 n と, 2以上の任意の整数 k に対して, 不等式

$$|\,a_{kn}-k\,a_n\,|<k-1$$

が成り立つことを証明せよ.

(2) 任意の正整数 n, k に対して, 不等式

$$|\,n\,a_{n+k}-(n+k)\,a_n\,|<2n+k-2$$

が成り立つことを証明せよ.

III a, b を実数とする.

(1) 定積分
$$I(a,b) = \int_{-\pi}^{\pi} (1 + a\sin x + b\,x)^2\, dx$$
を求めよ.

(2) a, b が実数全体を動くとき, (1) の定積分 $I(a,b)$ を最小にするような実数の組 (a,b) がただ一組存在することを示し, そのような (a,b) 及び $I(a,b)$ の最小値を求めよ.

IV xy 平面において原点 $\mathrm{O}\,(0,0)$ を中心とする半径 1 の円を S とし, 円 S の任意の点 P に対して, 点 P における円 S の接線を $L(P)$ とおく.
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
を全ての成分が実数からなる 2 行 2 列の行列とし, A によって定まる xy 平面の一次変換
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
を φ とおく. このとき, 円 S の任意の点 P に対して円 S の点 Q が存在し, 接線 $L(P)$ のいかなる点も φ によって接線 $L(Q)$ の点に移されると仮定する.

(1) 円 S の点 P の座標を (s,t) として, 接線 $L(P)$ の方程式を求めよ.

(2) 行列 A は逆行列を持つことを証明せよ.

(3) 円 S の点 Q は円 S の点 P により一意的に定まることを示し, 点 Q の座標 (u,v) を点 P の座標 (s,t) 及び行列 A の成分 a, b, c, d を用いて表示せよ.

(4) xy 平面の一次変換 φ は, 原点 $\mathrm{O}\,(0,0)$ を中心とする回転か, または原点 $\mathrm{O}\,(0,0)$ を通るある直線 ℓ を対称軸とする対称変換のいずれかであることを証明せよ.

―余白―

(このページ以降に問題はありません)