



過去問ライブラリー

Powered by 全国大学入試問題正解

大阪大学

数学

問題

2019年度入試

【学部】 理学部、医学部、歯学部、薬学部、工学部、基礎工学部

【入試名】 前期日程

【試験日】 2月25日

【試験時間】 150分



「過去問ライブラリーは、(株) 旺文社が刊行する「全国大学入試問題正解」を中心とした過去問、研究・解答（解答・解説）を掲載しています。本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は、(株) 旺文社または各情報提供者に帰属します。本サービスに掲載の全部または一部の無断複製、配布、転載、譲渡等を禁止します。各設問に対する「研究・解答」は原則として旺文社が独自に作成したものを掲載しています。掲載問題のうち★印を付したものは、著作権法第67条の2第1項の規定により文化庁長官に裁定申請を行った上で利用しています。

裁定申請日 【2017年】8/1 【2018年】4/24、9/20 【2019年】6/20

1 以下の問い合わせよ。ただし、 \log は自然対数、 e はその底とする。

(1) b を実数とする。関数

$$f(x) = \int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{x}{x^2 + 1} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

は単調に減少することを示せ。

(2) $a \leq b$ を満たす正の実数 a, b に対し、不等式

$$\frac{a}{a^2 + 1} e^{-\frac{a^2}{2}} - \frac{b}{b^2 + 1} e^{-\frac{b^2}{2}} \leq \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq e^{-\frac{a^2}{2}} (b - a)$$

が成り立つことを示せ。

(3) 数列 $\{I_n\}$ を次のように定める。

$$I_n = \int_1^n e^{-\frac{nt^2}{2}} dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log I_n$$

を求めよ。ただし、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(n+1) = 0$$

(配点率 20%)

2 自然数 a, b に対し、

$$w = \cos \frac{a\pi}{3+b} + i \sin \frac{a\pi}{3+b}$$

とおく。ただし、 i は虚数単位とする。複素数 z_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を以下のように定める。

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 1 - w, \quad z_n = (1 - w)z_{n-1} + wz_{n-2} \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

このとき以下の問い合わせよ。

(1) $a = 4, b = 3$ のとき、複素数平面上の点 $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7$ をこの順に線分で結んでできる図形を図示せよ。

(2) $a = 2, b = 1$ のとき、 z_{63} を求めよ。

(3) さいころを 2 回投げ、1 回目に出た目を a 、2 回目に出た目を b とする。このとき $z_{63} = 0$ である確率を求めよ。

(配点率 20%)

3 実数 s, t が $s^2 + t^2 \leq 6$ を満たしながら変わるととき、 xy 平面上で点 $(s+t, st)$ が動く領域を A とする。このとき以下の問い合わせよ。

(1) $(2, \sqrt{2})$ が領域 A の点かどうか判定せよ。

(2) A を図示せよ。

(3) A を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

(配点率 20%)

4 下の図は、 $\frac{1}{1}$ から始めて分数 $\frac{p}{q}$ の左下に分数 $\frac{p}{p+q}$ 、右下に

分数 $\frac{p+q}{q}$ を配置するという規則でできた樹形図の一部である。

このとき以下の問い合わせよ。

(1) この樹形図に現れる分数はすべて既約分数であることを示せ。ただし整数 $\frac{n}{1}$ は既約分数とみなす。

(2) すべての正の有理数がこの樹形図に現れることを示せ。

(3) この樹形図に現れる有理数はすべて異なることを示せ。

(4) $\frac{19}{44}$ はこの樹形図の上から何段目の左から何番目に配置されるか答えよ。たとえば、 $\frac{3}{1}$ は上から 3 段目の左から 4 番目である。

(配点率 20%)

5 座標空間内の 2 つの球面

$$S_1: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 7$$

と

$$S_2: (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 1$$

を考える。 S_1 と S_2 の共通部分を C とする。このとき以下の問い合わせよ。

(1) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち、半径が最小となる球面の方程式を求めよ。

(2) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち、半径が $\sqrt{3}$ となる球面の方程式を求めよ。

(配点率 20%)

