

大阪大学

数学

問題

2016年度入試

【学部】 理学部、医学部、歯学部、薬学部、工学部、基礎工学部

【入試名】 前期日程

【試験日】 2月25日

【問題解答前の確認事項】

〔注意〕 理学部数学科（挑戦枠）は2月26日実施の試験も解答すること。



「過去問ライブラリーは、(株) 旺文社が刊行する「全国大学入試問題正解」を中心とした過去問、研究・解答（解答・解説）を掲載しています。本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は、(株) 旺文社または各情報提供者に帰属します。

本サービスに掲載の全部または一部の無断複製、配布、転載、譲渡等を禁止します。

各設問に対する「研究・解答」は原則として旺文社が独自に作成したものを掲載しています。

掲載問題のうち★印を付したものは、著作権法第67条の2第1項の規定により文化庁長官に裁定申請を行った上で利用しています。

裁定申請日 【2017年】8/1 【2018年】4/24、9/20 【2019年】6/20

- 1** 1 以上 6 以下の 2 つの整数 a, b に対し、関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次の条件 (ア), (イ), (ウ) で定める。

$$\begin{array}{ll} (\text{ア}) & f_1(x) = \sin(\pi x) \\ (\text{イ}) & f_{2n}(x) = f_{2n-1}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - x\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ (\text{ウ}) & f_{2n+1}(x) = f_{2n}(-x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{array}$$

以下の問いに答えよ。

(配点率 20%)

(1) $a = 2, b = 3$ のとき, $f_5(0)$ を求めよ。

(2) $a = 1, b = 6$ のとき, $\sum_{k=1}^{100} (-1)^k f_{2k}(0)$ を求めよ。

(3) 1 個のさいころを 2 回投げて、1 回目に出る目を a , 2 回目に出る目を b とするとき, $f_6(0) = 0$ となる確率を求めよ。

次の問いに答えよ。

(配点率 20%)

(1) c を正の定数とする。正の実数 x, y が $x + y = c$ をみたすとき,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right)$$

の最小値を c を用いて表せ。

(2) 正の実数 x, y, z が $x + y + z = 1$ をみたすとき,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 - \frac{4}{3z}\right)$$

の最大値を求めよ。

- 3** 座標平面において、原点 O を中心とする半径 r の円と放物線 $y = \sqrt{2}(x - 1)^2$ は、ただ 1 つの共有点 (a, b) をもつとする。

(配点率 20%)

(1) a, b, r の値をそれぞれ求めよ。

(2) 連立不等式

$$a \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{2}(x - 1)^2, \quad x^2 + y^2 \geq r^2$$

の表す領域を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

正の整数 n に対して

4

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

とおき、1 以上 n 以下のすべての奇数の積を A_n とする。

(配点率 20%)

(1) $\log_2 n$ 以下の最大の整数を N とするとき、 $2^N A_n S_n$ は奇数の整数であることを示せ。

(2) $S_n = 2 + \frac{m}{20}$ となる正の整数の組 (n, m) をすべて求めよ。

(3) 整数 a と $0 \leq b < 1$ をみたす実数 b を用いて、

$$A_{20} S_{20} = a + b$$

と表すとき、 b の値を求めよ。

5

円上の 5 点 A, B, C, D, E は反時計回りにこの順に並び、円周を 5 等分している。5 点 A, B, C, D, E を頂点とする正五角形を R_1 とする。 $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{CD} = \vec{c}$ とおき、 \vec{a} の大きさを x とする。

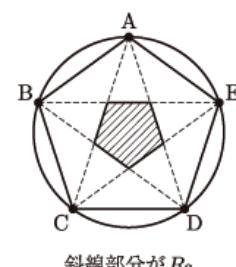
(配点率 20%)

(1) \vec{AC} の大きさを y とするとき、 $x^2 = y(y - x)$ がなりたつことを示せ。

(2) \vec{BC} を \vec{a}, \vec{c} を用いて表せ。

(3) R_1 の対角線の交点として得られる R_1 の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_2 とする。 R_2 の一辺の長さを x を用いて表せ。

(4) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 R_n の対角線の交点として得られる R_n の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_{n+1} とし、 R_n の面積を S_n とする。



斜線部分が R_2

を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} S_k$$