信州大学

医学部医学科　　　　　　　　　　　　　　後期日程

平成 27 年度入学試験問題

数　　学

注　意　事　項

1. この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけません。
2. $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ はすべて必須問題です。
3. 解答は，別に配付してある解答用紙の指定されたところに記入してください。解答用紙は問題ごとに別になっているので注意してください。
4. 受験番号は，それぞれの解答用紙の指定された 2 箇所に記入してください。決して氏名を書いてはいけません。
5. 解答用紙は，試験終了後回収します。
6. この問題冊子は持ち帰ってください。

1 αを実数とし，2つの曲線 $C_1: y = x^3 - \alpha x$ と $C_2: y = 4x^2$ を考える。

(1) 曲線 C_1 と x 軸が異なる3つの交点をもち，曲線 C_1 と C_2 が異なる3つの交点をもつための α の必要十分条件を求めよ。

(2) (1) で求めた α の条件のもとで，曲線 C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{2}$ $A,\ B,\ C$ が $A+B+C=\pi$ を満たすとき，次の等式を示せ。

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C-2=2\cos A\cos B\cos C$$

$\boxed{3}$ 実数 a, b に対して 2 次関数 $f(x)=-(a^2+1)x^2+2ax+b$ を考える。

(1) 2 次方程式 $f(x)=0$ が実数解をもつような a が存在するための，b の必要十分条件を求めよ。

(2) $b=0$ とする。a を動かすときの $f(x)=0$ の実数解の最大値を求めよ。また，そのときの a の値も求めよ。

$\boxed{4}$ 関数 $h(x)$ は連続であり，すべての実数 x に対して $h(x) > 0$ であるとする。実数 a, b, c, d は $c < a < b < d$ を満たすとし，2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ を

$$f(x) = \int_a^b |x - t|h(t)dt$$

$$g(x) = \int_c^d |x - t|h(t)dt$$

と定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ は，開区間 (a, b) で下に凸であることを示せ。

(2) 関数 $f(x) - g(x)$ は，閉区間 $[a, b]$ で 1 次関数または定数関数であることを示せ。

$\boxed{5}$ 正の実数 α, β は $\alpha^2+\beta^2 \leqq 1$ を満たすとする。関数 $f(x)$ を

$$f(x)=2\alpha^2\beta x^3-(1+\alpha^2)x^2+1$$

と定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) \leqq 0$ が成り立つことを示せ。

(2) $q=\dfrac{1+\alpha^2}{3\alpha^2\beta}$ とおくとき，$f(q) \leqq 0$ が成り立つことを示せ。

(3) $f(x)=0$ と $0<x \leqq \dfrac{1}{\alpha}$ を満たす x が，ただ1つだけ存在することを示せ。