信州大学

医学部医学科　　　　　　　　　　　　　　後期日程

平成 26 年度入学試験問題

数　　学

注　意　事　項

1. この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけません。
2. $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ はすべて必須問題です。
3. 解答は，別に配付してある解答用紙の指定されたところに記入してください。解答用紙は問題ごとに別になっているので注意してください。
4. 受験番号は，それぞれの解答用紙の指定された 2 箇所に記入してください。決して氏名を書いてはいけません。
5. 解答用紙は，試験終了後回収します。
6. この問題冊子は持ち帰ってください。

$\boxed{1}$ p を素数とする。自然数 m を，p で割り切れない整数 a と整数 $n \geqq 0$ を用いて

$$m = ap^n$$

と表すとき，$f_p(m) = p^{-n}$ と定める。

(1) 自然数 k, l に対し，

$$f_p(kl) = f_p(k)f_p(l)$$

であることを証明せよ。

(2) 自然数 k, l に対し，

$$f_p(k+l) \leqq \max\{f_p(k),\ f_p(l)\}$$

であることを証明せよ。ただし，実数 a, b に対して $\max\{a,\ b\}$ は a, b のうち小さくない方を表す。

(3) $S_n = \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}$ とおく。$\lim_{n\to\infty} f_2(S_n + k) = 0$ となる自然数 k をすべて求めよ。

$\boxed{2}$ $\triangle$ABC において，BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$ とおく。また，$\triangle$ABC の外心を O，内心を I とおき，外接円の半径を R とおく。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \dfrac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}} + c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}$ を示せ。

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right|^2 = R^2 - \dfrac{abc}{a+b+c}$ を示せ。

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$ が与えられたとき，数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$，$\{d_n\}$ を以下のように定める。

$$b_n = (-1)^n(a_n + a_{n-1}) \qquad (n \geqq 2), \qquad b_1 = 0$$
$$c_n = b_n - b_{n-1} \qquad (n \geqq 2), \qquad c_1 = 0$$
$$d_n = d_{n-1} - (n-1)c_n \qquad (n \geqq 2), \qquad d_1 = 0$$

$\{a_n\}$ が実数 a に収束するとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{d_n}{n}$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 曲線 $C : y = \dfrac{4}{x^2}$ $(x > 0)$ に直線 $\ell : x + y = a$ が接しているとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 曲線 C 上の点を直線 ℓ で折り返した点の軌跡を C_ℓ とする。C_ℓ，x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{5}$ e を自然対数の底とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対し，

$$0 \leqq \int_0^1 t^n e^{1-t}\,dt < e-1$$

を示せ。

(2) 正の数 a と自然数 n に対し，

$$e^a = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k!} + \frac{1}{n!}\int_0^a t^n e^{a-t}\,dt$$

が成り立つことを示せ。

(3) (1) と (2) を用いて $2.4 < e < 3$ を証明せよ。