

平成 25 年度入学試験問題

数 学

注 意 事 項

1. この問題冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはいけません。
2. **1**，**2**，**3**，**4**，**5** はすべて必須問題です。
3. 解答は、別に配付してある解答用紙の指定されたところに記入してください。
解答用紙は問題ごとに別になっているので注意してください。
4. 受験番号は、それぞれの解答用紙の指定された 2 箇所に記入してください。
決して氏名を書いてはいけません。
5. 解答用紙は、試験終了後回収します。
6. この問題冊子は持ち帰ってください。

1

方程式 $a \cdot 2^x - x^2 = 0$ が異なる 3 つの解をもつような実数 a をすべて求めよ。

2 $0 \leq t \leq 1$ とする。連立不等式

$$\begin{cases} (x-t)^2 + y^2 \leq 1-t^2 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

の表す領域の面積が最大になるときの t の値を求めよ。

- 3** (1) 平面上において、原点 O と 2 点 $A(1,1)$, $B(2,1)$ に対して、ベクトル $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ を考える。定数 s と t が条件 $s \geq 0$, $t \geq 0$, $1 \leq s+t \leq 2$ をみたしながら変わるとき、点 P の描く図形の面積を求めよ。さらに内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$ の最大値と最小値も求めよ。
- (2) 整数 a, b, c, d を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は逆行列をもつとする。この逆行列の成分がすべて整数であるための必要十分条件は、 $ad - bc = 1$ または $ad - bc = -1$ であることを示せ。

4 不等式

$$\pi(e-1) < \int_0^\pi e^{|\cos 4x|} dx < 2(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$$

が成り立つことを示せ。

- 5 (1) 次の式が成り立つように、定数 A, B, C, D を定めよ。

$$\frac{8}{x^4 + 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 2x + 2}$$

- (2) $\tan \frac{\pi}{8}, \tan \frac{3\pi}{8}$ の値を求めよ。
(3) 次の定積分を求めよ。

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{8}{x^4 + 4} dx$$