医学部医学科　　　　　　　　　　　　後期日程

信州大学

平成24年度入学試験問題

数　学

注　意　事　項

1. この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけません。

2. $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ はすべて必修問題です。

3. 解答は，別に配付してある解答用紙の指定されたところに記入してください。解答用紙は問題ごとに別になっているので注意すること。

4. 受験番号は，それぞれの解答用紙の指定された2箇所に記入してください。決して氏名を書いてはいけません。

5. 解答用紙は，試験終了後回収します。

6. この問題冊子は持ち帰ってください。

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ。

(1) n を自然数とするとき, 次の不等式を証明せよ。

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2(4k^2+6k+1)}{(2k+2)!} < 1$$

(2) 次の不等式をみたす最小の自然数 n を求めよ。

$$\frac{999}{1000} < \sum_{k=1}^{n} \frac{2(4k^2+6k+1)}{(2k+2)!}$$

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。

(1) $a^2+b^2=121212$ となる整数の組 (a,b) は存在しないことを証明せよ。

(2) n を自然数とするとき，行列 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)$ は，ある区間 $0 < x < \alpha$ 上で定義され，次の 3 条件をみたす。

(i) $f(x) > 0$

(ii) $f'(x) < 0$

(iii) $f'(x) > -\frac{x}{f(x)}$

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t, f(t))$ における接線 ℓ と法線 m の x 軸との交点を，それぞれ $\mathrm{A}(a(t), 0)$，$\mathrm{B}(b(t), 0)$ とする。x 軸上の点 $\mathrm{Q}(q(t), 0)$ を，$\angle\mathrm{OPQ}$ の 2 等分線が直線 BP に一致するような点とする。ただし，点 O は原点である。

次の問いに答えよ。

(1) $q(t) = \dfrac{2a(t)b(t)}{a(t) + b(t)}$ を示せ。

(2) $\alpha = \sqrt{2}$ かつ $f(x) = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{2}}$ のとき，$\displaystyle\lim_{t \to \sqrt{2}-0} q(t)$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 実数 a は $0 < a < 1$ とする。関数 $f(x) = x\log(x^2 + a^2)$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ が極小値をとる点はただ1つであることを示せ。

(2) $x \geqq 0$ の範囲で，x 軸と曲線 $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

$\boxed{5}$ 方程式

$$4xe^{-x} = 1$$

は, $x > 0$ の範囲にちょうど 2 つの解をもつことを示せ。さらに，それらを α, β $(\alpha < \beta)$ とすると,

$$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}, \quad 1 < \beta$$

であることを示せ。ただし，自然対数の底 e の値は 2.718 …… である。