

平成 23 年度入学試験問題

数 学

注 意 事 項

1. この問題冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはいけません。
2. **1**，**2**，**3**，**4**，**5** はすべて必修問題です。
3. 解答は、別に配付してある解答用紙の指定されたところに記入してください。
解答用紙は問題ごとに別になっているので注意すること。
4. 受験番号は、それぞれの解答用紙の指定された 2 箇所に記入してください。
決して氏名を書いてはいけません。
5. 解答用紙は、試験終了後回収します。
6. この問題冊子は持ち帰ってください。

- 1** $a > 0$ とする。放物線 $y = ax^2$ が、円 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ と、原点以外に 2 つの共有点 P, Q をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。また、 a がこの範囲を動くとき、放物線と線分 PQ で囲まれた部分の面積 $S(a)$ の最大値を求めよ。また、そのときの a の値を求めよ。

2

原点を中心とする半径 1 の円 S と点 $A(x, y)$ を考える。ただし、 $|x| < 1, y > 1$ とする。点 A と点 $B(-1, 0)$ を結ぶ直線と円 S との交点を D 、点 A と点 $C(1, 0)$ を結ぶ直線と円 S との交点を E とする。点 D および点 E から x 軸に下ろした垂線の足をそれぞれ F および G とする。直線 DG と直線 EF の交点を M とするとき直線 AM は x 軸に直交することを示せ。

3

一辺の長さが1である正方形の紙を2本の対角線の交点を通る直線で折る。このとき、紙が重なる部分の面積の最小値を求めよ。

4 実数 a は $0 \leq a \leq 2\pi$ をみたすとする。 $x > 0$ のとき、不等式

$$x^3 - 3 \log\{(2 \sin 3a - 4 \cos^2 a + 5)x\} - 1 + 6 \log 2 \geq 0$$

が成り立つように、実数 a の値の範囲を求めよ。

5

次の問いに答えよ。

(1) 和 $\frac{{}^nC_0}{2} + \frac{{}^nC_1}{2 \cdot 2^2} + \frac{{}^nC_2}{3 \cdot 2^3} + \frac{{}^nC_3}{4 \cdot 2^4} + \cdots + \frac{{}^nC_n}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}$ を求めよ。

(2) 実数 a に対し, $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ とする。 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し,

$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。このとき, $x_n + y_n = (1+a)^n$ を示せ。また,
 x_n, y_n を求めよ。