信州大学

経済学部
理 学 部
医 学 部

前期日程

平成 27 年度入学試験問題

数　　学

注 意 事 項

1. この問題冊子は試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 解答用紙は問題冊子とは別になっているので，解答はすべて解答用紙の指定されたところに記入すること。また，解答用紙は問題ごとに別になっているので，注意すること。
3. 受験番号を解答用紙の指定されたところへ必ず記入すること。決して氏名を書いてはいけない。
4. この問題冊子は持ち帰ること。

解答にあたっての注意事項

この問題冊子には，経済学部，理学部，医学部の問題がある。受験者は下の表にしたがって，志望学部学科の問題を解答すること。

学 部	学 科	解 答 す る 問 題
経済学部	経 済 学 科 経済システム法学科	$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の 4 問
理 学 部	数 学 科	$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$，$\boxed{7}$ の 6 問
医 学 部	医 学 科	$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$，$\boxed{7}$ の 5 問
	保 健 学 科	$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の 4 問

$\boxed{1}$ 原点を中心とする半径 1 の円 O の上に，3 点 $\mathrm{A}\left(0,\ 1\right)$，$\mathrm{B}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{C}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ をとる。線分 AC の中点を M，線分 BC の中点を N とする。2 点 M，N を通る直線が円 O と交わる 2 点のうち，N に近い方の交点を Q とする。このとき，線分 NQ の長さを求めよ。

$\boxed{2}$ 次の 3 つの条件を満たす自然数の組 (x, y, z) を考える。

(i) x は奇数である。

(ii) $x^2 + y^2 = z^2$

(iii) x, y, z の最大公約数は 1 である。

例えば $(x, y, z) = (3, 4, 5), (5, 12, 13)$ などがその例である。

(1) y は偶数であることを示せ。

(2) $x = a^2 - b^2$, $y = 2ab$ となる自然数 a, b が存在することを示せ。

(3) 条件を満たす (x, y, z) で，$(3, 4, 5)$ と $(5, 12, 13)$ 以外のものを 2 組求めよ。

$\boxed{3}$　放物線 $y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ を C とし，直線 $y = 2x - 1$ を ℓ とする。

(1) 放物線 C が点 $(1, 1)$ で直線 ℓ と接し，かつ x 軸と共有点をもつための a, b, c が満たす必要十分条件を求めよ。

(2) $a = \dfrac{8}{9}$ のとき，(1) の条件のもとで，放物線 C と直線 ℓ および x 軸とで囲まれた部分のうち，第 1 象限にある部分の面積を求めよ。

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ。

(1) n 個の実数 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ に対して

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqq n\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$$

が成立することを示せ。また，等号が成立するための $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ についての必要十分条件を求めよ。

(2) 偏りをもつサイコロを2回投げるとき，同じ目が続けて出る確率は $\dfrac{1}{6}$ よりも大きいことを示せ。ただし，サイコロが偏りをもつとは，1から6の目が同様に確からしく出ないことをいう。

$\boxed{5}$ n を自然数とする。

(1) n 以下の非負の整数 k について，関数 $x(1+x)^n$ の導関数の x^k の係数を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2{}_nC_k=(n+1)(n+4)2^{n-2}$ を示せ。

$\boxed{6}$ 円 $x^2+(y-1)^2=1$ を C，円 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ を C_0 とする。C, C_0, x 軸に接する円を C_1 とする。C, C_1, x 軸に接し C_0 と異なる円を C_2 とし，これを繰り返して C, C_n, x 軸に接し C_{n-1} と異なる円を C_{n+1} とする。また，円 C_n の半径を a_n とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) a_1 を求めよ。

(2) $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ の満たす漸化式を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{7}$ 次の条件 $(*)$ を満たすような実数 a で最大のものを求めよ。

$(*)$ $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲のすべての x に対して

$$\cos x \leqq 1 - ax^2$$

が成り立つ。