

信州大学

平成 25 年度入学試験問題

数 学

注 意 事 項

1. この問題冊子は試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 解答用紙は問題冊子とは別になっているので、解答はすべて解答用紙の指定されたところに記入すること。また、解答用紙は問題ごとに別になっているので、注意すること。
3. 受験番号を解答用紙の指定されたところへ必ず記入すること。決して氏名を書いてはいけない。
4. この問題冊子は持ち帰ること。

解答にあたっての注意事項

この問題冊子には、経済学部、理学部、医学部の問題がある。受験者は下の表にしたがって、志望学部学科の問題を解答すること。

学部	学科	解答する問題
経済学部	経済学科 経済システム法学科	①, ②, ③, ④ の4問
理学部	数理・自然情報科学科	②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦ の6問
医学部	医学科	③, ④, ⑤, ⑥, ⑦ の5問
	保健学科	①, ②, ③, ④ の4問

- 1** (1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項が $a_n = 1 + (-1)^n$ で与えられているとき、数列 $\{a_n\}$ の第 1 項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。
- (2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項が $b_n = n + (-1)^n$ で与えられているとき、数列 $\{b_n\}$ の第 1 項から第 n 項までの和 T_n を求めよ。

- 2** (1) 放物線 $C: y = x^2 + x - 1$ と直線 $l: y = 2x + 1$ の交点の座標を求めよ。
- (2) (1) で求めた交点の x 座標の大きい方を x_0 とする。 $a > x_0$ とする。 C と l で囲まれた領域の面積を S_1 , C と l および直線 $x = a$ で囲まれた領域の面積を S_2 , C と l および直線 $x = -a$ で囲まれた領域の面積を S_3 とする。 $S_1 = S_2 + S_3$ となるときの a の値を求めよ。

3 (1) 式

$$1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}$$

をみたす自然数の組 (a_1, a_2, a_3) で, $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$ となるものをすべて求めよ。

(2) r を正の有理数とする。式

$$r = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}$$

をみたす自然数の組 (a_1, a_2, a_3) で, $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$ となるものは有限個しかないことを証明せよ。ただし, そのような組が存在しない場合は 0 個とし, 有限個であるとみなす。

4 (1) x が $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ をみたしながら変わる時、 $\sin x + \cos x$ の値の範囲を求めよ。

(2) x が $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ をみたしながら変わる時、 $\sin 2x - \sin x - \cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

5 実数 p, q と自然数 n に対して

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

とおく。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ とする。このとき p と q がみたす条件を求めよ。
- (2) $(p, q) \neq (0, 0)$ とする。極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n}$ を求めよ。

- 6 a を定数とする。放物線 $y = a - x^2$ の接線のうち、原点との距離が最小になるものの方程式を求めよ。またそのときの距離を求めよ。

7 曲線 $C: y = e^x$ について以下の問いに答えよ。

(1) C 上の点 $P(p, e^p)$ における接線 l および法線 n の方程式を求めよ。

(2) $p > 0$ とする。 C と l および y 軸で囲まれる図形の面積を $S(p)$ とする。また C と n および y 軸で囲まれる図形の面積を $T(p)$ とする。このとき極限

$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{pT(p)}{S(p)}$ を求めよ。