

平成 29 年度医学科入学試験問題

数 学

(注意事項)

- 1 監督者の指示があるまで、この冊子を開いてはいけない。
- 2 解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること。
- 3 この問題冊子の本文は、4 ページからなっている。落丁、乱丁及び印刷不鮮明な箇所等があれば、手をあげて監督者に知らせなさい。
- 4 この問題冊子の計算用紙と余白は、適宜下書きに使用してもよい。
- 5 解答は、すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること。
- 6 この問題冊子は持ち帰ること。

1 正二十面体 X を考える。

- (1) X のそれぞれの面が正三角形であることを用いて、 X の辺の数と頂点の数および1つの頂点に集まる辺の数を求めよ。

次に X の1辺の長さは2とし、 X は球 Q の表面に内接しているとする。 Q の中心を O とする。 X 上の1つの頂点 A とそのとりにある頂点 B を1つとる。直線 OA 上にある A と異なる X の頂点を C 、直線 OB 上にある B と異なる X の頂点を D とおく。

- (2) 頂点 A, B, C, D は同一平面上にあり、四角形 $ABCD$ は長方形であることを証明せよ。
- (3) 線分 AD の長さを求めよ。
- (4) Q の表面積を求めよ。
- (5) X の体積を求めよ。
- (6) X の1つの辺を共有する2つの面に O から下ろした垂線をそれぞれ OH , OK とする。このときベクトル \vec{OH} と \vec{OK} の内積を求めよ。

2 関数 $f(x) = xe^{-\sqrt{x}}$ ($x \geq 0$) を考える。

- (1) 増減と凹凸を調べて、関数 $f(x)$ のグラフの概形をかけ。
- (2) xy 平面上において曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = \frac{x}{e^2}$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

3 xyz 空間において、原点 O を中心とする半径 1 の球面を S とする。 a を正の実数とし、点 $A(1, 0, 0)$ と点 $P(0, a, 0)$ を通り z 軸に平行な平面を H とする。 H と zx 平面のなす角を θ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とおく。 H と S の交わりである円を C とおく。

- (1) a を θ を用いて表せ。
- (2) C の中心の座標を θ を用いて表せ。
- (3) H 上の C で囲まれた部分を底面とし、原点 O を頂点とする円錐の体積を V とする。 V の最大値とそのときの a の値を求めよ。

4 $0 < a < 1$ である実数 a に対して、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = a, a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義する。

- (1) $a = \frac{1}{2}$ のとき、 a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ。
- (2) すべての自然数 n について、 $0 \leq a_n \leq 1$ であることを証明せよ。
- (3) $0 < a_k < \frac{1}{4}$ をみたす自然数 k について、 $a_{k+1} > 3a_k$ であることを証明せよ。
- (4) $a_m \geq \frac{3}{4}$ をみたす自然数 m が存在することを証明せよ。
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ であるとき、 $a_N = 0$ となる自然数 N が存在することを証明せよ。