京都府立医科大学

前期日程試験

平成28年度医学科入学試験問題

数　学

〔注意事項〕

1　監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない。

2　**解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること。**

3　この問題冊子の本文は，4ページからなっている。落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所等があれば，手をあげて監督者に知らせなさい。

4　この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい。

5　解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること。

6　この問題冊子は持ち帰ること。

1 nは2以上の整数とする。変量xについてのデータの値をx_k $(1 \leqq k \leqq n)$とし，変量yについてのデータの値をy_k $(1 \leqq k \leqq n)$とする。変量zはデータの値が$x_k y_k$ $(1 \leqq k \leqq n)$である変量を表す。

(1) 変量xとyのn個の値の組を$(x_k,\ y_k)$ $(1 \leqq k \leqq n)$としたときのxとyの共分散s_{xy}(偏差の積の平均)について

$$s_{xy} = \overline{z} - \overline{x}\,\overline{y}$$

が成り立つことを証明せよ。ここで$\overline{x}$，$\overline{y}$，$\overline{z}$はそれぞれ変量x，y，zについてのデータの値の平均値を表す。

0以上の整数aと1以上の整数bに対し，aをbで割った余りを$R_b(a)$と表す。l，mは2以上n以下の整数とする。変量xとyのn個の値の組を

$$(x_k,\ y_k) = (R_l(k-1)+1,\ R_m(k-1)+1) \quad (1 \leqq k \leqq n)$$

としたときのxとyの相関係数をrとする。

(2) lはnの約数とし，$m = n$であるとき，rを求めよ。

(3) $n = l(l+1)$とし，$m = l+1$であるとき，rを求めよ。

2 zは0でない複素数とし，$\alpha=\dfrac{3}{4}(z+\overline{z})$，$\beta=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}\right)$とおく。ただし$\overline{z}$は$z$に共役な複素数である。

(1) $\beta=0$となるzはどのような複素数か述べよ。

(2) αとβがともに自然数となるzをすべて求めよ。

(3) 複素数平面上において，(2)で求めたzに対応する点のすべてを周または内部に含む円を考え，そのような円のうち最小の面積をもつものをCとする。Cの中心を表す複素数とCの半径を求めよ。

$\boxed{3}$ a，b を正の実数とし，媒介変数表示

$$x = a\cos 2t,\ \ y = b\sin 3t \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{3}\right)$$

で表される xy 平面上の曲線を C とする。

(1) 実数 θ に対して，$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ であることを証明せよ。

(2) y を x を用いて表せ。

(3) x の関数 y の増減を調べ，曲線 C の概形をかけ。

(4) 曲線 C と x 軸とで囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

4 xy 平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。すべての整数 l, m に対し，直線 $x = l$ と直線 $y = m$ を引き，xy 平面を格子点を頂点とする一辺の長さが1の正方形の集まりに分割する。その一つ一つの正方形(格子点を頂点とする1辺の長さが1の正方形)の内部を区画と呼ぶ。正の実数 k に対して原点を通る直線 $L_k : y = kx$ をとり，L_k が通る区画について考える。ここで L_k が区画を通るとは，直線 L_k と区画が共有点をもつことをいう。自然数 n に対して，不等式 $n - 1 < x < n$ で表される xy 平面上の領域を D_n とする。D_n に含まれ，直線 L_k が通る区画の個数を a_n とおく。

以下 k は無理数とする。

(1) 直線 L_k は原点以外に格子点を通らないことを証明せよ。

(2) $k < a_n < k + 2$ であることを証明せよ。

(3) N を自然数とするとき，極限 $\displaystyle\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n$ を求めよ。

(4) $0 < k < 1$ とする。自然数 N に対し，N 以下の自然数 n で $a_n \geqq k + 1$ となる n の個数を A_N とおく。極限 $\displaystyle\lim_{N \to \infty} \frac{A_N}{N}$ を求めよ。