九州大学　一般 後期

平成25年度入学試験問題

数　　学

数学Ⅰ，数学A
数学Ⅱ，数学B
数学Ⅲ，数学C

（医学部・工学部）

（注意事項）

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子，解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子は，12ページあります。
   また，中にはさみ込まれている解答紙は，5枚（ $\boxed{54}$ から $\boxed{58}$ まで）です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し，
   問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は，
   手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に，各解答紙の2箇所に受験番号を記入しなさい。
5. 解答はすべて解答紙のおもてに記入しなさい。
   また，必要なら裏面を用いても構いません。
6. 試験終了後，問題冊子は持ち帰って下さい。

数　学

数学Ⅰ，数学A
数学Ⅱ，数学B
数学Ⅲ，数学C

（医学部・工学部）

[1] (配点 30 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{54}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

Oを原点とする xyz 空間内の点 A, B, C の座標をそれぞれ $(0,\ 1,\ 0)$, $(0,\ -2,\ 0)$, $\left(\frac{3}{2}\sqrt{3},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 点 A, B, C, D が正四面体の頂点となるとき，点 D の座標を求めよ。ただし，点 D の z 座標は正とする。

(2) (1) で定めた点 D に対して，線分 CD を 2 : 1 に内分する点を E，線分 AD を 2 : 1 に内分する点を F とする。このとき，三角形 OEF の面積を求めよ。

(3) (2) で定めた点 E, F に対して，点 O, E, F を通る平面が，点 O, E, F 以外で正四面体 ABCD の辺と交わる点の座標を求めよ。

（下書き用紙）

[2] (配点 30 点)

この問題の解答は，解答紙 **55** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

原点を出発し，数直線上を動く点Pがある。このとき，次の試行Tを考える。

(試行 T)　　Pは，1枚の硬貨を投げて表が出たら正の向きに1だけ移動し，裏が出たら負の向きに1だけ移動する。移動後に，Pが原点にあるとき，あるいは原点からの距離が3, 6, 9の位置にあるときには，白玉を1個もらう。

この試行Tを10回繰り返すとき，以下の問いに答えよ。

(1) 10回目の試行で初めて白玉をもらう確率を求めよ。

(2) 2回目の試行で初めて白玉をもらい，かつ，その後は白玉をもらわない確率を求めよ。

(3) もらう白玉の総数が1個である確率を求めよ。

(4) もらう白玉の総数が2個である確率を求めよ。

（下書き用紙）

[3] （配点 30 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{\mathbf{56}}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次式により定める。

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) すべての n に対して，xy 平面上の点 (a_n, b_n) が双曲線 $x^2 - 2y^2 = 4$ の上にあることを証明せよ。

(2) r, s, t は正の実数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} r & -r \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ が次の関係式を満たすとする。

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

このとき，r, s, t を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

（下書き用紙）

[4] （配点 30 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{\mathbf{57}}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

α を $0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とし，数列 $\{\theta_n\}$ を次式により定める。

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_{n+1} = \begin{cases} \theta_n + \alpha & \left(\theta_n \leqq \dfrac{\pi}{2} \text{ のとき}\right) \\ \theta_n - \alpha & \left(\theta_n > \dfrac{\pi}{2} \text{ のとき}\right) \end{cases} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

さらに数列 $\{x_n\}$ を次式により定める。

$$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = x_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sin\theta_{n+1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) x_3 が最大となる α を求めよ。

(2) $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ が最大となる α と，その極限値を求めよ。

（下書き用紙）

［5］（配点 30 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{58}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

O を原点とする xy 平面上の曲線 $y = e^{-x}|\sin x|$ $(x \geqq 0)$ を C とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，$(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ の範囲で y が最大となる曲線 C 上の点を P_n とする。このとき，点 P_n の座標を求めよ。

(2) 点 P_n から x 軸に下ろした垂線を $\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n$ とし，三角形 $\mathrm{OP}_n\mathrm{H}_n$ の面積を S_n とするとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。

(3) 曲線 C と線分 OP_1 で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。