九州大学　一般 前期

平成25年度入学試験問題

数　学

数学Ｉ，数学Ａ
数学II，数学Ｂ
数学III，数学Ｃ

（注意事項）

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子，解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子は，12ページあります。
   また，中にはさみ込まれている解答紙は，5枚（$\boxed{15}$から$\boxed{19}$まで）です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し，
   問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は，
   手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に，各解答紙の2箇所に受験番号を記入しなさい。
5. 解答はすべて解答紙のおもてに記入しなさい。
   小問があるときは，小問の番号を明記して解答しなさい。
   解答紙のうらに解答を記入してはいけません。
6. この教科は，250点満点です。なお，経済学部経済工学科については，
   300点満点に換算します。

◇M5(628—64)

数　学

数学Ⅰ，数学A
数学Ⅱ，数学B
数学Ⅲ，数学C

[1] （配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{\mathbf{15}}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

$a > 1$ とし，2 つの曲線

$$y = \sqrt{x} \qquad (x \geqq 0),$$

$$y = \frac{a^3}{x} \qquad (x > 0)$$

を順に C_1，C_2 とする。また，C_1 と C_2 の交点 P における C_1 の接線を l_1 とする。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C_1 と y 軸および直線 l_1 で囲まれた部分の面積を a を用いて表せ。

(2) 点 P における C_2 の接線と直線 l_1 のなす角を $\theta(a)$ とする $\left(0 < \theta(a) < \dfrac{\pi}{2}\right)$。このとき，$\displaystyle\lim_{a \to \infty} a \sin\theta(a)$ を求めよ。

（下書き用紙）

[2]（配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{\mathbf{16}}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

一辺の長さが1の正方形OABCを底面とし，点Pを頂点とする四角錐POABCがある。ただし，点Pは内積に関する条件 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{4}$, および $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}$ をみたす。辺 AP を 2 : 1 に内分する点を M とし，辺 CP の中点を N とする。さらに，点Pと直線BC上の点Qを通る直線PQは，平面OMNに垂直であるとする。このとき，長さの比 BQ : QC, および線分 OP の長さを求めよ。

（下書き用紙）

[3] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{\mathbf{17}}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

横一列に並んだ 6 枚の硬貨に対して，以下の操作 L と操作 R を考える。

L：さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。

R：さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

たとえば，表表裏表裏表　と並んだ状態で操作 L を行うときに，3 の目が出た場合は，裏裏表表裏表　となる。
以下,「最初の状態」とは硬貨が 6 枚とも表であることとする。

(1) 最初の状態から操作 L を 2 回続けて行うとき，表が 1 枚となる確率を求めよ。

(2) 最初の状態から L, R の順に操作を行うとき，表の枚数の期待値を求めよ。

(3) 最初の状態から L, R, L の順に操作を行うとき，すべての硬貨が表となる確率を求めよ。

（下書き用紙）

[4] （配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{18}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

原点 O を中心とし，点 $\mathrm{A}(0,1)$ を通る円を S とする。点 $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で円 S に内接する円 T が，点 C で y 軸に接しているとき，以下の問いに答えよ。

(1) 円 T の中心 D の座標と半径を求めよ。

(2) 点 D を通り x 軸に平行な直線を l とする。円 S の短い方の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$，円 T の短い方の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$，および線分 AC で囲まれた図形を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

（下書き用紙）

[5]　(配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{\mathbf{19}}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

実数 x，y，t に対して，行列

$$A=\begin{pmatrix} x & y \\ -t-x & -x \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

を考える。$(AB)^2$ が対角行列，すなわち $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ の形の行列であるとする。

(1) 命題「$3x-3y-2t \neq 0 \Longrightarrow A=tB$」を証明せよ。

以下 (2)，(3)，(4) では，さらに $A^2 \neq E$ かつ $A^4=E$ であるとする。ただし，E は単位行列を表す。

(2) $3x-3y-2t=0$ を示せ。

(3) x と y をそれぞれ t の式で表せ。

(4) x，y，t が整数のとき，行列 A を求めよ。