

平成 21 年度入学者選抜学力検査問題(前期日程)

数 学

I ・ II ・ III ・ A ・ B ・ C

(医学部)

(注 意)

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子は 4 ページ，解答用紙は 4 枚である。
指示があってから確認すること。
3. 解答はすべて解答用紙の指定のところに記入すること。
解答用紙の表面だけで書ききれない場合は，裏面の下半分
を使用することができる。
4. 解答用紙は持ち帰ってはならないが，問題冊子は必ず持ち
帰ること。

〔 I 〕 関数 $f(x) = -\cos^2 2x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2$ の $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における最大値と最小値を求めよ。また、そのときの x の値をそれぞれ求めよ。

〔Ⅱ〕 曲線 $C_1: y = xe^{-x}$ と曲線 $C_2: y = 2xe^{-2x}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の交点の座標を求めよ。
- (2) 曲線 C_1 と曲線 C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

〔Ⅲ〕 放物線 $C: y^2 = 2x$ 上の点 $P(a, b)$ における法線 L が x 軸, y 軸と交わる点をそれぞれ Q, R とするとき, 次の問いに答えよ。ただし, $b \neq 0$ とし, 座標の原点を O とする。

- (1) 法線 L の方程式を求めよ。
- (2) 放物線 C が三角形 OQR の面積を二等分するときの a の値を求めよ。
- (3) 関数 $y = \sqrt{2x}$ のグラフとその逆関数のグラフとで囲まれた図形を, x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

[IV] 関数 $f(x) = (1-x)^{-1}$ ($x \neq 1$) について、次の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対して、関数 $f(x)$ を n 回微分して得られる関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ。

(2) 自然数 n に対して、

$$f(a) = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + \int_0^a \frac{n(a-x)^{n-1}}{(1-x)^{n+1}} dx \quad (\star)$$

が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ。ただし $0 < a < 1$ とする。

(3) 前問(2)の(★)式右辺において、積分で表される項を次のように $R_n(a)$ とする。

$$R_n(a) = \int_0^a \frac{n(a-x)^{n-1}}{(1-x)^{n+1}} dx$$

$0 < a < 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(a)$ を求めよ。