[**1**] a を正の定数とし、関数 $f(x)$ を以下のように定める。

$$f(x) = \frac{\log x}{(1+x)^a} \qquad (x > 0)$$

このとき、次の問いに答えよ。

(1) $e^{\frac{1}{a}}$ と $e^{\frac{2}{a}}$ の間に $f'(c) = 0$ となる c が存在することを示せ。

(2) $f'(c) = 0$ となる c はただ一つであり、関数 $f(x)$ は $x = c$ で最大値をとることを示せ。

[**2**] 曲線 C を次の方程式で定める。

$$y=\sqrt{x^2+4} \qquad (x \geqq 0)$$

C 上の点 P を通る傾き -1 の直線が x 軸と交わる点の x 座標を $2t$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 点 P の x 座標、y 座標を t で表せ。

(2) 点 P が C 上を動いたときの t の最小値を求めよ。

(3) 原点を O とし、線分 OP, 曲線 C, y 軸で囲まれる図形の面積 S を t で表せ。

[**3**] $x \geqq 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対して、関数 $g(x) \quad (x > 0)$ を次のように定める。

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt \qquad (0 < x < 1)$$

$$g(x) = \int_{x-1}^x f(t)dt \qquad (x \geqq 1)$$

このとき、次の問いに答えよ。

(1) $x \neq 1$ における導関数 $g'(x)$ を求めよ。

(2) $f(x) = 2\pi\cos(2\pi x)$ のとき、 $g(x)$ を求めよ。

(3) 次のような $g(x)$ を定める $f(x)$ を求めよ。

$$g(x) = \sin(2\pi x) + x \qquad (0 < x < 1)$$

$$g(x) = 1 \qquad (x \geqq 1)$$

[4] 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ。ただし、a, b, c, d は実数とし、$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $a+d \neq 0$ とする。$A^2=E$ ならば $A=E$ または $A=-E$ であることを示せ。

(2) $a=d\neq 0$ とする。

(i) 行列 A^2+E は逆行列を持つことを示せ。

(ii) $A^4=E$ ならば $A=E$ または $A=-E$ であることを示せ。

[**5**] a を正の実数とする。曲線 C_a を極方程式

$$r = 2a\cos(a - \theta)$$

によって定める。このとき、次の問いに答えよ。

(1) C_a は円になることを示し、その中心と半径を求めよ。

(2) C_a が直線 $y = -x$ に接するような a をすべて求めよ。

[**6**] 数直線上の原点に立つ人が確率 p で表の出るコインを投げて、表が出れば $+1$ 進み、裏が出れば -1 進むとする。その場所で再びコインを投げ、その結果に応じて $+1$ または -1 進む。これを n 回繰り返した後のこの人の立つ位置を表す確率変数を S_n とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $\frac{1}{2}(S_n + n)$ は 2 項分布 $B(n, p)$ に従うことを示せ。

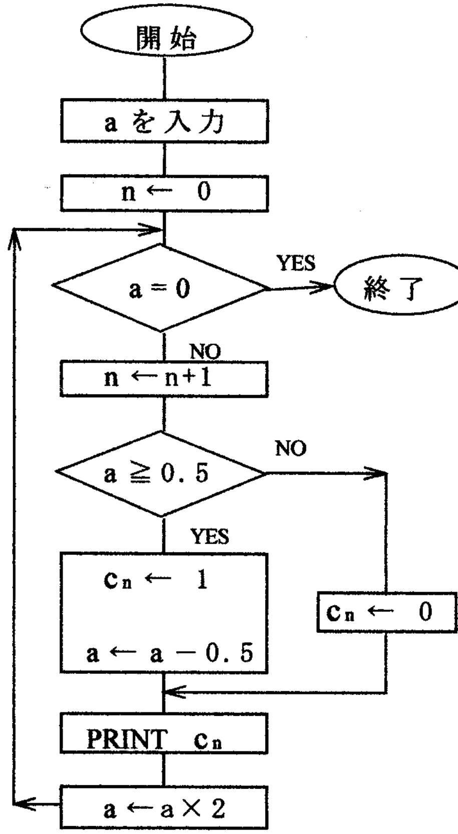
(2) $p = \frac{1}{2}$ のコインを 100 回投げた後に、この人が原点から 22 以上隔たっている確率は 0.05 以下であることを示せ。

ただし、確率変数 U が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとき、

$P(|U| < 1.96) = 0.95$ であることは用いてよい。

(3) 未知の p を持つコインを 100 回投げた後に、この人が -60 の位置にいたとする。このデータに基づいて、p の値を信頼度 95% で推定せよ。ただし、信頼区間の端点は小数点以下第 2 位まで求めよ。

[**7**] $0 < a < 1$ なる a に対して 0 と 1 の列 $c_1, \cdots, c_n$ を右の流れ図に従って計算する。このとき、次の問いに答えよ。



(1) $a = 0.25$ および $a = 0.375$ のとき、それぞれに対応する $c_1, \cdots, c_n$ を求めよ。

(2) $a = 0.1$ のとき、どのような出力が得られるか説明せよ。

(3) $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 1, c_4 = 1$ を出力して終了する a を求めよ。

(4) 逆に $c_1, \cdots, c_n$ が与えられたとき、$c_1, \cdots, c_n$ を出力して終了するような a を求める BASIC プログラムを書け。ただし、n および $c_1, \cdots, c_n$ は変数 N と C(1),⋯,C(N) に代入されているものとする。