〔1〕 $f(x)$を $0 \leqq x \leqq 1$ において連続かつ，$0 < x < 1$ において微分可能で $f'(x) > 0$ を満たす関数とする。$0 < t < 1$ に対し

$$I(t) = \int_0^1 |f(t) - f(x)|\, x\, dx$$

とおく。

(1) 導関数 $I'(t)$を求めよ。

(2) $I(t)$が最小となる t の値を求めよ。

〔2〕

(1) $x > 0$ に対して次の不等式を示せ。

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$$

(2) $f(x)$を $0 \leqq x \leqq 1$ で連続で，$f(x) \geqq 0$ を満たす関数とする。

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right)\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right)\right),$$

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx$$

とおくとき，

$$\lim_{n \to \infty} a_n = e^I$$

であることを示せ。

〔**3**〕 曲線 $y = x(1 - x)\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ を y 軸のまわりに回転してできる容器に，単位時間あたり一定の割合 V で水を注ぐ。

(1) 水面の上昇する速度 u を水面の高さ h の関数として表せ。

(2) 空の容器に水がいっぱいになるまでの時間を求めよ。

〔 **4** 〕 数列$\{a_n\}$と数cが次の条件を満たすとする。

$$a_1 = 2,\ a_2 = 2,$$
$$a_{n+1} = 2a_n + ca_{n-1},$$
$$a_{n+2} = (2c+1)a_n + 6a_{n-1} \quad (n \geqq 2)$$

(1) cを求めよ。

(2) $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$ を満たす2次正方行列Aを求めよ。

(3) $A\begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ を満たす数bをすべて求めよ。

(4) a_nを求めよ。

〔 **5** 〕 Cを双曲線$2x^2-2y^2=1$とする。l, mを点$(1,\ 0)$を通り，x軸とそれぞれθ, $\theta+\dfrac{\pi}{4}$の角をなす2直線とする。ここでθは$\dfrac{\pi}{4}$の整数倍でないとする。

(1) 直線lは双曲線Cと相異なる2点P，Qで交わることを示せ。

(2) PQ^2を，θを用いて表せ。

(3) 直線mと曲線Cの交点をR，Sとするとき，$\dfrac{1}{\mathrm{PQ}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{RS}^2}$は$\theta$によらない定数となることを示せ。

〔6〕 $$f(x)=\frac{1}{4x^8+5x^3+1}$$

とする。区間[0, 1]をn等分した分点を

$$x_0=0,\ x_1=\frac{1}{n},\ \cdots,\ x_{n-1}=\frac{n-1}{n},\ x_n=1$$

とする。

(1) 不等式

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\leqq\int_0^1 f(x)dx\leqq\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)$$

を示せ。

(2) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$と$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)$がともに$\int_0^1 f(x)dx$の小数第3位までの近似値となるためには，$n$をどのくらい大きくとればよいか。

(3) (2)の結果を用いて，$\int_0^1 f(x)dx$の小数第3位までの近似値を計算するプログラムを書け。

〔 7 〕 生徒数 32 名のある学級で生徒の兄弟姉妹の数(x)と，いとこの数(y)とを調べたところ，次の表を得た。

x \ y	1	2	3	4
0	3	4	1	0
1	4	4	4	4
2	0	1	4	3

(1) 変量 y の平均 μ_y と分散 σ_y^2 を求めよ。

(2) 変量 x と変量 y の相関関係について説明せよ。

(3) 2 人の生徒を無作為に復元抽出し，いとこの数 Y_1，Y_2 を調べる。標本 Y_1，Y_2 について，標本平均の期待値を求めよ。また，この場合，標本平均の分散は標本分散の期待値に等しくなることを示し，その値を求めよ。