〔 1 〕 関数 $f_n(x) = \sin^{n+2}x + 2\cos^{n+2}x$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 閉区間 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ における $f_n(x)$ の最大値 M_n と最小値 L_n を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathrm{L}_n}$ を求めよ。

〔２〕 eを自然対数の底とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $x \geqq 0$ のとき，不等式 $e^x \geqq 1 + x$ を示せ。

(2) $\tan\theta = \mathrm{M}$ （$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$）のとき，等式 $\displaystyle\int_0^{\mathrm{M}} \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \theta$ を示せ。

(3) $\mathrm{M} > 0$ のとき，不等式 $\displaystyle\int_0^{\mathrm{M}} \frac{1}{e^{x^2}}\,dx < \frac{\pi}{2}$ を示せ。

〔**3**〕 すべての正の実数 x について $x^{\sqrt{a}} \leqq a^{\sqrt{x}}$ となる正の実数 a を求めよ。

〔 4 〕 2次正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2=A$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) $a+d \neq 1$ のとき，A を決定せよ。

(2) 実数 u, v, x, y が $ux+vy=1$ を満たすとき，2次正方行列 $X=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x \quad y)$ は $X^2=X$ を満たすことを示せ。

(3) $a+d=1$ のとき，$d\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ が成り立ち，A は(2)の X の形になることを示せ。

〔5〕 次の問いに答えよ。

(1) 点（3， 0）を通り，円 $(x+3)^2+y^2=4$ と互いに外接する円の中心 $(X,\ Y)$ の軌跡を求めよ。

(2) (1)の軌跡上の点と定点（0，a）との距離の最小値を求めよ。

〔 6 〕 2つの変量 X, Y のそれぞれについて m 個の資料 x_1, …, x_m, および n 個の資料 y_1, …, y_n が与えられている。X, Y の資料に対する平均を $\overline{x}$, $\overline{y}$, 分散を S_x^2, S_y^2 とする。X と Y の資料を合わせてえられる $(m+n)$ 個の資料 x_1, …, x_m, y_1, …, y_n の平均を $\overline{z}$, 分散を S_z^2 とする。このとき，次の等式を示せ。

(1) $\overline{z}=\dfrac{1}{m+n}(m\overline{x}+n\overline{y})$

(2) $S_z^2=\dfrac{mS_x^2+nS_y^2}{m+n}+\dfrac{mn}{(m+n)^2}(\overline{x}-\overline{y})^2$

〔7〕 自然数 n を与え，関数

$$f(x)=\frac{x^n}{n+1}+\frac{x^{n-1}}{n}+\cdots+\frac{x}{2}+1$$

を定義するとき，方程式 $f(x)=0$ の近似解を求めるプログラムを考える。ただし，$x=c$ での関数値 $f(c)$ の計算には $P_0=\dfrac{1}{n+1}$ を初項とする漸化式

$$P_{k+1}=cP_k+\frac{1}{n-k},\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$$

を用いる。以下の問いに答えよ。

(1) P_2 を求めよ。

(2) P_k を求め，$P_n=f(c)$ を確かめよ。

(3) $f(a)f(b)<0$ となる実数 $a,\ b\ (a<b)$ が与えられたときに，閉区間 $[a,\ b]$ における方程式 $f(x)=0$ の近似解を 2 分法によって求めるプログラムを書け。ただし，反復を停止する条件は区間幅が 10^{-4} 以下とする。