B

平成21年度個別学力検査問題(医学部)

数　　学

前　期　日　程

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

2　この問題冊子は，2ページあり，問題は(1)から(4)まで4題あります。解答用紙は4枚あります。

　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの乱丁・落丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3　監督者の指示に従って，解答用紙に受験番号を記入しなさい。

4　解答は，解答用紙の該当箇所に記入しなさい。ただし，該当箇所に記入しきれない場合は，その解答用紙の裏に記入してもよい。その場合，裏に記入したと明記しなさい。ただし，解答用紙の裏の上部5 cm以内には解答を記入してはいけません。

5　配付された解答用紙は，持ち帰ってはいけません。

6　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

(1) 平面上に一辺の長さが$\sqrt{3}\,r$である正三角形△ABCとその平面上を動く点Pがある。正三角形△ABCの重心を始点としPを終点とするベクトルを$\vec{p}$とおく。次の問いに答えよ。なお，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$等の・は2つのベクトルの内積の記号である。

(i) $s=\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}$とおくとき，$s$をベクトル$\vec{p}$の大きさ$|\vec{p}\,|$と$r$を用いて表せ。

(ii) $t=\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}$とおくとき，$t$をベクトル$\vec{p}$の大きさ$|\vec{p}\,|$と$r$を用いて表せ。

(iii) (i)のsと(ii)のtに関してPが2つの不等式

$$s\geqq\frac{15}{4}r^2,\quad t\leqq\frac{3}{2}r^2$$

を同時に満たすとき，Pが描く図形の領域を求めて正三角形△ABCとともに図示せよ。

(2) 座標平面上で，不等式$x^2+y^2\leqq 1$の表す領域をDとする。点$(x,\ y)$がこの領域Dを動くとき，次の問いに答えよ。

(i) $s=x+y$，$t=xy$とするとき，点$(s,\ t)$全体の集合が表す領域を求めてst平面上に図示せよ。

(ii) $a\geqq 0$に対して，$(a-x)(a-y)$の最小値をaを用いて表せ。

(iii) 3枚の硬貨を同時に投げるとき，表が出た硬貨の枚数をbとする。$(b-x)(b-y)$の最小値をMとするとき，Mの期待値を求めよ。

(３) 数列$\{a_n\}$を次の式

$$a_1=\frac{1}{3},\ a_{2n}=\frac{2}{3}a_{2n-1},\ a_{2n+1}=\frac{1}{3}a_{2n}\quad(n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

(i) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ の和を求めよ。

(ii) $T_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}ka_k$ とするとき，$\lim_{n\to\infty}T_{2n}$ を求めよ。
必要ならば，$-1<r<1$ のとき $\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ であることを用いてもよい。

(４) αは定数とし，$f(x)=-\sin x+\alpha x$とする。$g(x)$は連続関数で

$$f(x)=\int_0^x(t-x)g(t)\,dt$$

を満たすとする。また，$h(x)=e^{-x}|g(x)|$とする。次の問いに答えよ。

(i) 定数αと関数$g(x)$を求めよ。

(ii) $0<x<2\pi$において関数$h(x)$の増減を調べ，極値を求めよ。

(iii) 関数$e^{-x}(\sin x+\cos x)$の導関数を求めよ。

(iv) $k=1,2,3,\cdots\cdots$ に対して$I_k=\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}h(x)\,dx$とするとき，$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}I_k$を求めよ。