

(1) 平面上に2点 $A(4, 2)$, $B(3, -1)$ と直線 $l: x - 2y + 5 = 0$ がある。

次の問いに答えよ。

(i) 線分 AB の垂直二等分線と直線 l との交点 Q の座標を求めよ。

(ii) 2点 A , B を通り、直線 l に接する円の方程式を求めよ。

(iii) 点 P が直線 l 上を動くとき、 $\angle APB$ の最大値を求めよ。

(2) 次の問いに答えよ。

- (i) 複素数平面上に直線 $l: 2x + 3y - 5 = 0$ がある。 l 上の任意の点を z で表す。 $z = x + yi$ と、 z に共役な複素数 $\bar{z} = x - yi$ がみたす関係式を

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} - 10 = 0$$

の形に表せ。ただし、 i は虚数単位であり、 α は複素数の定数である。

- (ii) (i)において、原点を O とし、直線 l が実軸、虚軸と交わる点をそれぞれ A 、 B とする。線分 OA 、 OB 上にそれぞれ点 P 、 Q をとり、さらに l 上に 2 点 R 、 S をとる。4 点 P 、 Q 、 R 、 S のつくる四角形が正方形となるとき、2 点 R 、 S を表す複素数を求めよ。

- (iii) 複素数平面上に直線 l' がある。 l' 上の任意の点 z は関係式

$$\bar{\beta}z + \beta\bar{z} + c = 0$$

をみたすとする。ただし、 β は 0 でない複素数の定数、 c は 0 でない実数の定数とする。この直線 l' に関して原点 O と対称な点を w とするとき、複素数 w を β と c を用いて表せ。

(3) 次の問いに答えよ。

(i) $f(x) = 5\pi x(1-x)$ とおく。関数 $y = \tan(f(x))$ の極値を求めよ。さらに、曲線 $y = \tan(f(x))$ と直線 $y = \frac{1}{2}$ との、 $0 < x < 1$ における交点の個数を求めよ。

(ii) $g(x) = a(x^3 - 3x) + b$ とおく。ただし、 a, b は $a > 0, 0 < b \leq \pi$ をみたす定数である。関数 $y = \tan(g(x))$ は極大値 -1 と極小値 1 をもち、さらにそのグラフと x 軸との、 $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ における交点の個数が 4 個であるとする。このとき、定数 a, b の値を求めよ。

(4) 1, 2, 3, ..., n と番号のついた n 個の箱がある。 k 番の箱には白玉 k 個と黒玉 $n - k$ 個が入っている。次の問いに答えよ。

(i) n 個の箱からでたらめに 1 つの箱を選び、その選んだ箱から玉を 1 回に 1 個ずつ 10 回取り出す。ただし、取り出した玉は毎回色を確認してからもとの箱に戻す。このとき、1 回だけ黒玉が取り出される確率を p_n とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ を求めよ。

(ii) $n = 10$ とする。7 番の箱から玉を、もどに戻すことなく、1 回に 1 個ずつ取り出す。このとき、白玉が 2 個取り出されるまでの取り出す回数の期待値を求めよ。