（1） 原点をOとする空間内の3点 $A(a,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ b,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ c)$ に対し，A，B，Cの定める平面を π とおく。ただし，$a>0$，$b>0$，$c>0$ とする。次の問いに答えよ。

(i) 平面 π 上の点Pに対し，ベクトル $\overrightarrow{OP}$ は

$$\overrightarrow{OP}=s\,\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}+(1-s-t)\,\overrightarrow{OC}$$

と表される。$\overrightarrow{OP}$ が平面 π と垂直になるように，s，t の値を a，b，c を用いて表せ。

(ii) 線分ABの中点をMとし，点Qは $\overrightarrow{CQ}=r\overrightarrow{CM}$ を満たす点であるとする。ベクトル $\overrightarrow{OQ}$ の大きさ $|\overrightarrow{OQ}|$ を最小にする r の値と，そのときの $|\overrightarrow{OQ}|$ の値を，それぞれ a，b，c を用いて表せ。

(iii) $\triangle OAB$，$\triangle OBC$，$\triangle OCA$，$\triangle ABC$ の面積を，それぞれ S_1，S_2，S_3，S とするとき，

$$S^2={S_1}^2+{S_2}^2+{S_3}^2$$

が成立することを示せ。

(2) 放物線 $y = x^2$ 上の2点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$における接線をそれぞれ l，m とし，l と m の交点をRとする。ただし，$p<q$ とする。$\angle\mathrm{PRQ}$ を θ とおくとき，次の問いに答えよ。

(i) 点Rの座標を p，q を用いて表せ。

(ii) $\tan\theta$ を p，q を用いて表せ。

(iii) 点Rが直線 $y = -2$ 上を動くとき，$\tan\theta$ の最小値を求めよ。

(iv) $\angle\mathrm{RPQ}$ を θ_1，$\angle\mathrm{RQP}$ を θ_2 とおくとき，

$$\frac{1}{\tan\theta_1} + \frac{1}{\tan\theta_2}$$

を p，q を用いて表せ。

（３） x 軸上を，以下の規則(a)，(b)に従って，１秒ごとに移動する点Rがある。

(a)　R は時刻 $n=0$ のとき原点にある。

(b)　R の座標が x のとき，１秒後に，座標 $x+1$ へ移動する確率は p，座標 $x-1$ へ移動する確率は $1-p$ である。

n を 0 以上の整数とし，時刻 n 秒での R の座標を X_n とする。次の問いに答えよ。

(i)　X_n の期待値を求めよ。

(ii)　$(X_n)^2$ の期待値を求めよ。

(iii)　(ii)で求めた期待値を E_n とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{E_n}{n}$ を求めよ。

(4) xy 平面において，△ABC に対し，対応する 3 点 A′，B′，C′ を次の規則で定める。

線分 A′B′ を 2 : 1 に内分する点がCであり，

線分 B′C′ を 2 : 1 に内分する点がAであり，

線分 C′A′ を 2 : 1 に内分する点がBである。

次の問いに答えよ。

(i) △ABC の頂点の座標がそれぞれ A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$，C$(c_1,\ c_2)$であるとき，A′ の座標を a_1，a_2，b_1，b_2，c_1，c_2 を用いて表せ。

(ii) 点 A は関数 $y = 2x^2 + 3x + 1$ のグラフ上の点であり，点 B は原点であり，点 C の座標は$(5 + 3\cos t,\ \ 5 + 3\sin t)$で与えられているとする。このとき，△ABC から上記の規則で定まる点 A′ の x 座標と y 座標の満たす関係式を求めよ。

(iii) (ii)で点 A と点 C が動くとき，点 A′ の描く曲線と x 軸とで囲まれた図形の面積 S を求めよ。