令　和　7　年　度
医学部前期入学試験問題

数　　学

(時間：120 分)

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

2　問題冊子は本文 1 ページ，解答用紙は 4 枚です。

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　解答は，すべて解答用紙の所定の欄に記入しなさい。なお，解答に至るまでの導出過程も記述すること。

5　問題冊子の余白は，計算等に用いて構いません。

6　試験終了後，解答用紙のみを回収します。

〔1〕 以下の各問いに答えよ。

(1) $a_1 = 1$，$a_2 = 8$，$a_n a_{n+2} = 4a_{n+1}^2$ で定義される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2) 赤玉5個と白玉19個，計24個の玉がある。また，3行8列のマス目状の器があり，1つのマスに1個の玉が入る。24個の玉をこの器にランダムに配置する。このとき，赤玉を1個以上含む列が4つ以下である確率を求めよ。また，赤玉を1個以上含む列が3つである確率を求めよ。

(3) 微分可能な関数 $f(x)$ が，$x \geqq 0$ で不等式 $f'(x) \leqq -2xf(x)$ を満たすとき，$x \geqq 0$ で不等式 $f(x) \leqq f(0)e^{-x^2}$ が成り立つことを示せ。

(4) 双曲線 $x^2 - y^2 = -1$ と直線 $y = 2$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(5) 媒介変数 t を用いて $x = \cos t$，$y = \sin 2t$ と表される曲線の概形を描け。

〔2〕 図1のような正五角形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ について，5つの三角形$\triangle A_0A_1A_2$，$\triangle A_1A_2A_3$，$\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_3A_4A_0$，$\triangle A_4A_0A_1$ の重心をそれぞれ B_1，B_2，B_3，B_4，B_0 とする。また，5つの三角形$\triangle A_0A_2A_3$，$\triangle A_1A_3A_4$，$\triangle A_2A_4A_0$，$\triangle A_3A_0A_1$，$\triangle A_4A_1A_2$ の重心をそれぞれ C_0，C_1，C_2，C_3，C_4 とする。$\theta = 72°$ として，以下の問いに答えよ。

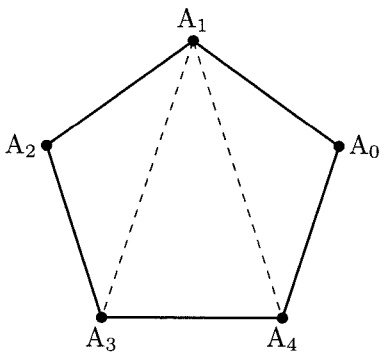

図1

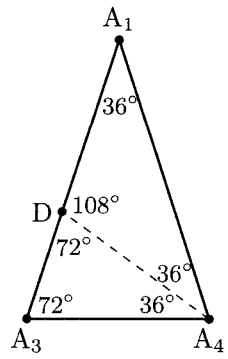

図2

(1) 2点 A_0，A_1 の座標が $A_0(1, 0)$，$A_1(\cos\theta, \sin\theta)$ となるように x 軸と y 軸を定める。A_2，A_3，A_4 の座標を θ で表せ。

(2) 図2を参考にして，$\cos 72°$ と $\cos 36°$ の値を求めよ。ただし，二重根号は用いないこと。

(3) 3点 A_1，B_1，C_1 は同一直線上にあることを示せ。

(4) 五角形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ の面積を S_a，五角形 $B_0B_1B_2B_3B_4$ の面積を S_b，五角形 $C_0C_1C_2C_3C_4$ の面積を S_c とする。面積比 $S_a : S_b : S_c$ を求めよ。

〔3〕 $a > 1$，$0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とし，座標空間内の4点 $A(1, 0, 0)$，$B(-1, 0, 0)$，$C(a\cos\theta, a\sin\theta, 1)$，$D(-a\cos\theta, -a\sin\theta, 1)$ を考える。$s = \sin\theta$ として，以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle ABC$ を含む平面を $\boldsymbol{\alpha}$，$\triangle ABD$ を含む平面を $\boldsymbol{\beta}$ とする。$\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ の両方に接する球で，中心の z 座標が $t > 0$ であるものの半径を a，s，t を用いて表せ。

(2) 四面体ABCDに内接する球の半径と中心の座標を a，s を用いて表せ。

(3) 四面体ABCDの体積を V_1，内接球の体積を V_2 とし，極限値 $\rho(s) = \lim_{a \to \infty} \dfrac{aV_2}{V_1}$ を考える。θ を変化させたとき，$\rho(s)$ が最大となる s の値を求めよ。