

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 問題冊子は本文 1 ページ、解答用紙 4 枚です。
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 解答は、すべて解答用紙の所定の欄に記入しなさい。なお、解答に至るまでの導出過程も記述すること。
- 5 問題冊子の余白は、計算等に用いて構いません。
- 6 試験終了後、解答用紙のみを回収します。

〔 1 〕 以下の各問いに答えよ。

- (1) 数の和 $\sum_{n=2}^{10} 111_{(n)}$ を 5 進法で表せ。ここで、 $111_{(n)}$ は n 進数である。
- (2) n は自然数とする。 x についての n 次多項式 $f(x)$, $g(x)$ は、異なる $n+1$ 個の実数 $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ について、 $f(x_k) = g(x_k)$ を満たすものとする。このとき、すべての実数 x について、 $f(x) = g(x)$ であることを示せ。
- (3) 関数 $f(x)$ を、 $f(0) = 0$, $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$ のとき) と定める。導関数 $f'(x)$ が存在するか調べよ。また、導関数 $f'(x)$ が存在する場合、その導関数 $f'(x)$ の連続性を調べよ。
- (4) サイコロを 5 回投げ、5 つの出た目の積を X とする。 X の正の約数の個数が 6 個になる場合は何通りあるか。

〔 2 〕 xy 平面上の 3 点 $A(4, 12)$, $B(8, 0)$, $C(-8, 0)$ について、線分 AB , AC の中点をそれぞれ D , E とする。また、直線 DE と x 軸に接し、中心の x 座標が $\sqrt{5}$ であるような円を T とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 2 点 D , E の座標と円 T の方程式を求めよ。
- (2) $\triangle ADE$ を空間内の xy 平面にあるとみなし、 H を空間内の点とする。 $\triangle ADE$ を直線 DE のまわりに回転させることにより、点 A を点 H に重ねることができるための必要十分条件を線分 DH , EH の長さの条件として求めよ。
- (3) T 上の点 F を、 $\triangle DEF$, $\triangle ADE$, $\triangle BDF$, $\triangle CEF$ からなる図形が四面体の展開図になるように選ぶことができる。このとき、四面体を組み立てると、 A , B , C は 1 点 G で重なり、四面体 $DEFG$ になる。 $\triangle DEF$ は xyz 空間の xy 平面上にあるとみなすとき、このような点 G の座標をすべて求めよ。

〔 3 〕 p と k を正の整数とする。 $\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots + \frac{x^{p-1}}{p}\right)^k$ の展開式における x^{p-1} の係数を既約分数で表したときの分母を $a(p, k)$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $(1 + 2x + 3x^2)^k$ の展開式における x^2 の係数が 3 の倍数であるための必要十分条件を k の条件として求めよ。
- (2) $k \geq 4$ のとき、 $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^k$ の展開式における x^4 の係数が 5 の倍数であるための必要十分条件を k の条件として求めよ。
- (3) $a(3, 1)$, $a(3, 2)$, $a(3, 3)$ の値を求めよ。
- (4) p は素数とする。 $a(p, k)$ が p の倍数であるための必要十分条件を k の条件として求めよ。

〔 4 〕 xy 平面において、点 P は原点を中心とする半径 6 の円周上を、点 Q は原点を中心とする半径 2 の円周上をそれぞれ移動している。時刻 $t = 0$ のとき、 P は点 $(6, 0)$ に、 Q は点 $(2, 0)$ に位置し、それぞれ反時計まわりに一定の速さで連続的に移動する。 P は 4π 秒で円を 1 周し、 P と Q の移動する速さは等しい。また、線分 PQ を 3 : 1 に内分する点を R とし、 t 秒時点での R の座標を $(f(t), g(t))$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) すべての実数 t ($t \geq 0$) について、 $f(t) = r(t) \cos t$, $g(t) = r(t) \sin t$ を満たす関数 $r(t)$ が存在することを示せ。
- (2) $f(t)$ と $g(t)$ の $0 \leq t \leq \pi$ における増減を調べ、最大値と最小値を求めよ。
- (3) 媒介変数表示 $x = f(t)$, $y = g(t)$ ($0 \leq t \leq \pi$) で与えられる曲線 C の概形を描け。
- (4) (3) の曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。
- (5) 点 R の軌跡を xy 平面に描け。