令和６年度入学者選抜
学力検査問題冊子
（前期日程）

数　学
問　題　冊　子

（医学部）

注　意　事　項

1. 開始の合図があるまで，問題冊子を開いてはいけません。

2. 開始の合図の後，解答にかかる前に，まず，問題冊子が４ページからなっていることを確認しなさい。

3. 問題は全部で４問あります。

4. 試験中に印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および汚れなどに気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

5. 解答は，解答冊子の各問題に対応する解答欄に記入しなさい。

6. 試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

前期日程数学

(このページは空白)

1 nを自然数とする。赤玉, 白玉それぞれn個の計$2n$個の玉が1つの袋に入っている。この袋からよくかき混ぜて無作為にn個の玉を取り出すとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 取り出したn個の玉のうち, 赤玉がk個である確率を求めよ。ただし, $0 \leqq k \leqq n$とする。

(2) $\sum_{k=0}^{n} ({}_n\mathrm{C}_k)^2 = {}_{2n}\mathrm{C}_n$を示せ。

(3) pを$n < p \leqq 2n$を満たす素数とする。そのとき, ${}_{2n}\mathrm{C}_n$はpで割り切れるが, p^2では割り切れないことを示せ。

2 nを自然数とする。$z = 1 + \sqrt{3}\,i$に対して, $z^n = a_n + b_n i$とおく。ここで, iは虚数単位であり, a_n, b_nはそれぞれz^nの実部, 虚部を表す。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) $a_n^2 + b_n^2$をnを用いて表せ。

(2) $a_n,\ b_n$がともに整数になるとき, nの値をすべて求めよ。

(3) $\omega_1 = \sqrt{3} + 5\,i,\ \omega_2 = -\sqrt{3} + 11\,i$として, 複素数平面上で2点$\mathrm{Q}(\omega_1), \mathrm{R}(\omega_2)$を通る直線を$\ell$とする。点$\mathrm{P}(z^n)$と$\ell$の距離$d_n$の最小値とそのときの$n$の値を求めよ。

3 aを正の実数とする。$-a \leqq x \leqq a$を定義域とする関数$f(x)=\displaystyle\int_{-a}^{a}|t-x|e^{-t^2}\,dt$について, 以下の問いに答えよ。

(1) 曲線$y=f(x)$は$-a<x<a$で下に凸であることを示せ。

(2) $f(x)$が最小となるときのxの値を求めよ。

(3) $f(x)$の最小値が$\dfrac{1}{2}$のとき, aの値を求めよ。

4 座標空間において, 球$S:(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=4$を$x$軸を含む平面$\alpha$で切断する。$S$およびその内部で$\alpha$の上側($z$軸の正の方向)にある部分の体積を$K_U$, 下側にある部分の体積を$K_D$とする。ただし, 体積は切り口も含めて考える。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 平面αが点$\mathrm{P}(4,4,2)$を通るとき, αと球Sが交わってできる円の半径を求めよ。

(2) (1)のときのK_Dを求めよ。

(3) $\dfrac{K_U}{K_D}=\dfrac{5}{27}$を満たし, かつ$\alpha$は平面$y=5$上の点Qを通るとき, 点Qの$z$座標を求めよ。