

(令 7 前)

数 学

(理 科 系)

(1 ～ 5 ページ)

- ・ ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点

1. k を実数とする。 $f(x)$ と $g(x)$ を

$$f(x) = |x^3 - x|, \quad g(x) = k(x + 1)$$

とおき，曲線 $y = f(x)$ を C ，直線 $y = g(x)$ を ℓ とする。以下の問に答えよ。(配点 30 点)

- (1) 曲線 C の概形をかけ。ただし，関数 $f(x)$ の極大値を調べる必要はない。
- (2) 曲線 C と直線 ℓ がちょうど 4 つの共有点をもつような k の値を求めよ。

2. 実数 a に対して、 a を超えない最大の整数を k とするとき、 $a - k$ を a の小数部分という。 n を自然数とし、 $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$ とおく。以下の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) $0 < a_n < 1$ が成り立つことを示せ。

(2) b_n を $\left(3n - \frac{1}{a_n}\right)$ の小数部分とする。 b_n を n を用いて表せ。

(3) b_n を (2) で定めたものとする。 m, n を異なる 2 つの自然数とすると、 $a_m + b_n \neq 1$ であることを示せ。

3. 媒介変数 θ を用いて

$$x = \sin \theta, \quad y = \cos \theta + |\sin \theta| \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

で表される曲線を C とする。以下の問に答えよ。(配点 30 点)

- (1) 曲線 C の概形をかけ。
- (2) 曲線 C で囲まれた部分の面積を求めよ。

4. s, t を実数とする。座標空間に 3 点

$$A(-4, -1, 0), B(-3, 0, -1), P(s, t, -2s + t - 1)$$

がある。以下の問に答えよ。(配点 30 点)

- (1) 3 点 A, B, P は一直線上にないことを示せ。
- (2) 点 P から直線 AB に下ろした垂線を PH とする。点 H の座標を s を用いて表せ。
- (3) s, t が変化するとき, 三角形 ABP の面積の最小値を求めよ。

5. 連続関数 $f(x)$ は $x \geq 0$ で $f(x) \geq 0$ を満たし、 $x > 0$ で微分可能であり、その導関数 $f'(x)$ は連続であるとする。 $t \geq 1$ を満たす t に対して、原点 O と点 $P(t, f(t))$ の距離を $g(t)$ とする。また、 $t > 1$ を満たす t に対して、 $y = f(x)$ ($1 \leq x \leq t$) で表される曲線の長さを $h(t)$ とし、 $t = 1$ のときは $h(1) = 0$ とする。以下の問に答えよ。(配点 30 点)

- (1) $t > 1$ とする。开区間 $(1, t)$ で常に $f(x) - xf'(x) = 0$ が成り立つならば、閉区間 $[1, t]$ で $\frac{f(x)}{x}$ は定数であることを示せ。
- (2) $t \geq 1$ を満たす任意の t に対して、 $g(t) = h(t) + 2$ が成り立つとする。このとき、 $f(1)$ の値を求めよ。また、 $t \geq 1$ のとき $f(t)$ を t を用いて表せ。

