令和７年度入学試験問題（前期日程）

数　学　甲（数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B・数C）

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

注　意　事　項

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。
2. 解答は，必ず解答欄に記入すること。
3. 解答時間は，120分である。

受験番号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

$\boxed{1}$ nを自然数，$f_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}$ とする。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　$f_2(x)$ の導関数を求めよ。

問 2　$x \geqq 0$ のとき，不等式 $e^x \geqq f_1(x)$ を示せ。

問 3　$x \geqq 0$ のとき，すべての自然数 $n \geqq 1$ に対して不等式 $e^x \geqq f_n(x)$ を示せ。

問 4　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，すべての自然数 $n \geqq 1$ に対して不等式 $e^x \leqq f_n(x) + \frac{x^n}{n!}$ を示せ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
問 4	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

問 3

問 4

2　$a > 0$ として，$g(a) = \int_a^{a+1} (x - \log x)\,dx$ とする。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　不定積分 $\int \log x\,dx$ を求めよ。

問 2　$g(a)$ を求めよ。

問 3　$g(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

2 解答欄

問１

問２

問３

3 四面体 OABC の辺の長さを $\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=\sqrt{5}$，$\mathrm{OC}=\sqrt{6}$，$\mathrm{AB}=2\sqrt{2}$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として，$\vec{a}\cdot\vec{c}=3$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$ とする。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

問 2　点 O から平面 ABC に垂線を下ろしその交点を H とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

問 3　点 A から平面 OBC に垂線を下ろしその交点を K とする。このとき，直線 OH と直線 AK は交わることを示せ。また，その交点を M とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

3 **解答欄**

問 1

問 2

問 3

4 赤玉3個と白玉3個が入っている袋がある。まず3枚のコインを投げ，表がk枚出たとき，この袋に赤玉をk^2個追加し，次にその袋から玉を2個同時に取り出すという試行を行う。例えば，コイン投げで表が2枚，裏が1枚出たときは，赤玉4個を追加して，赤玉7個と白玉3個が入っている袋から玉を2個同時に取り出す。コイン投げで3枚とも裏が出たときは，赤玉の追加はなく，赤玉3個と白玉3個が入っている袋から玉を2個同時に取り出す。次の問いに答えよ。(50点)

問1　コイン投げで3枚とも表でありかつ袋から取り出した玉が2個とも赤玉である確率を求めよ。

問2　袋から取り出した玉が2個とも赤玉である確率を求めよ。

問3　袋から取り出した玉が2個とも赤玉であったとき，コイン投げで3枚とも表であったという条件付き確率を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問1	
問2	
問3	
小計	

4 解答欄

問1

問2

問3

採　点　欄	
数　　学甲	
1	
2	
3	
4	
計	

受　験　番　号

甲 解答例

1 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $f_2(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2$ より，$f_2'(x) = 1 + x$ である。

問 2 $g_1(x) = e^x - f_1(x)$ とおく。$x \geqq 0$ で $g_1'(x) = e^x - 1 \geqq 0$ なので，$g_1(x)$ は $x \geqq 0$ で単調増加である。さらに $g_1(0) = 0$ なので，$g_1(x) \geqq 0$，つまり $e^x \geqq f_1(x)$ が成り立つ。

x	0	$\cdots$
$g_1'(x)$	0	$+$
$g_1(x)$	0	$\nearrow$

問 3 $g_n(x) = e^x - f_n(x)$ とおく。問 2 で示したように $x \geqq 0$ のとき $g_1(x) \geqq 0$ が成り立つ。$x \geqq 0$ で，$g_n(x) \geqq 0$ が成り立つと仮定する。$f_{n+1}'(x) = f_n(x)$ なので

$$g_{n+1}'(x) = e^x - f_{n+1}'(x) = e^x - f_n(x) = g_n(x) \geqq 0$$

である。さらに $g_{n+1}(0) = 0$ なので，$x \geqq 0$ のとき $g_{n+1}(x) \geqq 0$ が成り立つ。

問 4 $h_n(x) = e^x - f_n(x) - \dfrac{1}{n!}x^n$ とおく。$h_1'(x) = e^x - 2$ は $0 \leqq x < \log 2$ の範囲で負，$\log 2 < x \leq 1$ で正である。さらに，$h_1(0) = 0, h_1(1) = e - 3 < 0$ なので，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $h_1(x) \leqq 0$ が成り立つ。

x	0	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$	1
$h_1'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$h_1(x)$	0	$\searrow$	$1 - 2\log 2$	$\nearrow$	$e - 3$

次に $0 \leqq x \leqq 1$ で $h_n(x) \leqq 0$ が成り立つと仮定する。$f_{n+1}'(x) = f_n(x)$ より，$h_{n+1}'(x) = e^x - f_{n+1}'(x) - \dfrac{x^n}{n!} = h_n(x) \leqq 0$。よって $h_{n+1}(x)$ は単調減少。加えて，$h_{n+1}(0) = 0$ なので，$0 \leqq x \leqq 1$ で $h_n(x) \leqq 0$ が成り立つ。

x	0	$\cdots$	1
$h_{n+1}'(x)$	0	$-$	$-$
$h_{n+1}(x)$	0	$\searrow$	

2 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $\displaystyle\int \log x\,dx = \int (x)' \log x\,dx = x\log x - \int x(\log x)'\,dx$

$$= x\log x - \int dx = x\log x - x + C.$$

問 2 問 1 を用いて,

$$\begin{aligned} g(a) &= \int_a^{a+1} (x - \log x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - (x\log x - x)\right]_a^{a+1} \\ &= \frac{1}{2}(a+1)^2 - (a+1)\log(a+1) + a + 1 - \frac{1}{2}a^2 + a\log a - a \\ &= a + \frac{3}{2} - (a+1)\log(a+1) + a\log a \end{aligned} \tag{1}$$

問 3 問 2 より

$$g'(a) = 1 - \{\log(a+1) + 1\} + \log a + 1 = 1 - \log\left(1 + \frac{1}{a}\right)$$

$g'(a) = 0$ とすると, $\log\left(1 + \dfrac{1}{a}\right) = 1 = \log e$ より, $1 + \dfrac{1}{a} = e$ である。これを a について解くと $a = \dfrac{1}{e-1}$ なので，次のような増減表を得る。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e-1}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘	最小	↗

(1) に $a = \dfrac{1}{e-1}$ を代入して

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{e-1}\right) &= \frac{1}{e-1} + \frac{3}{2} - \frac{e}{e-1}\log\frac{e}{e-1} + \frac{1}{e-1}\log\frac{1}{e-1} \\ &= \frac{1}{e-1} + \frac{3}{2} - \frac{e}{e-1}\log e + \frac{e}{e-1}\log(e-1) - \frac{1}{e-1}\log(e-1) \\ &= \frac{1}{2} + \log(e-1). \end{aligned}$$

以上より, $g(a)$ の最小値は，$a = \dfrac{1}{e-1}$ のとき $\dfrac{1}{2} + \log(e-1)$ である。

$\boxed{3}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{b}-\vec{a}|^2\right)=\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(9+5-8\right)=3$

(別解) 余弦定理より $\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{3^2+(\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot3\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{9+5-8}{6\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

よって, $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot\sqrt{5}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}=3$.

問 2　H は平面 ABC 上の点なので, $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}=s\,(\vec{b}-\vec{a})+t\,(\vec{c}-\vec{a})$ と表せる。

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(1-s-t)\,\vec{a}+s\,\vec{b}+t\,\vec{c}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}-\vec{a}$ と直交するので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\left\{(1-s-t)\,\vec{a}+s\,\vec{b}+t\,\vec{c}\right\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})\\&=(1-s-t)(3-9)+s(5-3)+t(3-3)=-6+8s+6t=0\\\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=\left\{(1-s-t)\,\vec{a}+s\,\vec{b}+t\,\vec{c}\right\}\cdot(\vec{c}-\vec{a})\\&=(1-s-t)(3-9)+s(3-3)+t(6-3)=-6+6s+9t=0\end{aligned}$$

これを解いて $s=\dfrac{1}{2},\,t=\dfrac{1}{3}$ である。 以上より, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{6}\,\vec{a}+\dfrac{1}{2}\,\vec{b}+\dfrac{1}{3}\,\vec{c}$.

問 3　K は平面 OBC 上の点なので $\overrightarrow{\mathrm{OK}}=k\,\vec{b}+l\,\vec{c}$ と表せる。

$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\overrightarrow{\mathrm{OK}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\vec{a}+k\vec{b}+l\vec{c}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に直交するので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=(-\vec{a}+k\vec{b}+l\vec{c})\cdot\vec{b}=-3+5k+3l=0\\\overrightarrow{\mathrm{AK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=(-\vec{a}+k\vec{b}+l\vec{c})\cdot\vec{c}=-3+3k+6l=0\end{aligned}$$

これを解いて $k=\dfrac{3}{7},\,l=\dfrac{2}{7}$ である。よって, $\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\dfrac{3}{7}\,\vec{b}+\dfrac{2}{7}\,\vec{c}$.

次に, 直線 OH と直線 AK は交わることを示す。

直線 OH 上の点 P は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m\,\overrightarrow{\mathrm{OH}}$, 直線 AK 上の点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+n\,\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ と表される。よって直線 OH と直線 AK が交わることを示すには $m\,\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+n\,\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ をみたす m,n を見つければよい。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{6}\,\vec{a}+\dfrac{1}{2}\,\vec{b}+\dfrac{1}{3}\,\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+n\,\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+n\left(\overrightarrow{\mathrm{OK}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=(1-n)\,\vec{a}+n\,(\dfrac{3}{7}\,\vec{b}+\dfrac{2}{7}\,\vec{c}\,)$ なので

$$\frac{m}{6}\,\vec{a}+\frac{m}{2}\,\vec{b}+\frac{m}{3}\,\vec{c}=(1-n)\,\vec{a}+\frac{3n}{7}\,\vec{b}+\frac{2n}{7}\,\vec{c}\qquad(1)$$

ここで, O, A, B, C は同一平面上にないので, (1) より

$$\frac{m}{6}=1-n,\qquad\frac{m}{2}=\frac{3n}{7},\qquad\frac{m}{3}=\frac{2n}{7}.$$

これは $n=\dfrac{7}{8},\,m=\dfrac{3}{4}$ のときのみ成立する。よって, 直線 OH と直線 AK は交わる。

このときの P と Q が交点 M に一致するので, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{8}\,\vec{a}+\dfrac{3}{8}\,\vec{b}+\dfrac{1}{4}\,\vec{c}$ である。

$\boxed{4}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　コイン投げで 3 枚とも表が出るという事象を A とし，

取り出した玉が 2 個とも赤であるという事象を R とする。

表が 3 枚出たとき，袋の中には赤玉 12 個，白玉 3 個が入っているので，

$$P(A \cap R) = P(A)P_A(R) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{{}_{12}\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{12 \cdot 11}{15 \cdot 14} = \frac{11}{140}$$

問 2　コイン投げで表が 2 枚，1 枚，0 枚出るという事象をそれぞれ B, C, D とすると，

問 1 と同様に

$$P(B \cap R) = P(B)P_B(R) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_{7}\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2} = \frac{3}{8} \cdot \frac{7 \cdot 6}{10 \cdot 9} = \frac{7}{40}$$

$$P(C \cap R) = P(C)P_C(R) = 3 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{{}_{4}\mathrm{C}_2}{{}_{7}\mathrm{C}_2} = \frac{3}{8} \cdot \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 6} = \frac{3}{28}$$

$$P(D \cap R) = P(D)P_D(R) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{{}_{3}\mathrm{C}_2}{{}_{6}\mathrm{C}_2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{3 \cdot 2}{6 \cdot 5} = \frac{1}{40}$$

事象 R は互いに排反な事象 $A \cap R$, $B \cap R$, $C \cap R$, $D \cap R$ の和事象なので，

$$\begin{aligned} P(R) &= P(A \cap R) + P(B \cap R) + P(C \cap R) + P(D \cap R) \\ &= \frac{11}{140} + \frac{7+1}{40} + \frac{3}{28} = \frac{11 + 28 + 15}{140} = \frac{54}{140} \\ &= \frac{27}{70} \end{aligned}$$

問 3　求める確率は $P_R(A)$ であるから，問 1，問 2 より

$$P_R(A) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{11}{140} \cdot \frac{70}{27} = \frac{11}{54}$$