

1 さいころを繰り返し投げて、 n 回目に出た目の数を X_n とし、 $a_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ とする。このとき、各 n について、 $a_n \leq 9$ となる確率を求めよ。

2 $a > 1, a > p > 0$ とする。2直線 $l_1: y = 2x - 1, l_2: y = a$ の交点を S, l_1 と x 軸の交点を T とし、 y 軸上の点 $P(0, p), l_1$ 上の点 $A(1, 1), l_2$ 上の点 $Q(q, a)$ をとる。

$\angle PQS = 135^\circ, \angle AQS = 45^\circ$ であるとき、次の問いに答えよ。

- (1) p, q それぞれを a で表せ。
- (2) $\angle PAT = \angle QAS$ であるとき、 p, a それぞれの値を求めよ。

3 楕円 $E : \frac{x^2}{8} + y^2 = 1$ について、次の問いに答えよ。

- (1) E 上の点 (a, b) における E の接線の x 切片と y 切片の和を a で表したものを $f(a)$ とするとき、 $f(a)$ を求めよ。ただし、 $a > 0$, $b > 0$ とする。
- (2) $f(a)$ が最小となる a の値を求めよ。

4 $a > 0$ とするとき、関数 $f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{a}}$ について、次の問いに答えよ。

(1) $x = c$ で $f(x)$ が極大値をとるとき、 c を a で表せ。

(2) 定積分 $\int_0^c f(x) dx$ を a で表せ。