

滋賀医科大学
平成 31 年度
医学科一般入試(前期日程)

問題冊子

数 学

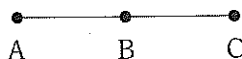
(注 意)

1. 問題冊子は試験開始の合図があるまで開かないこと。
2. 問題冊子は表紙のほか 2 ページである。
3. 試験中に問題冊子及び解答用紙の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせること。
4. 解答用紙のすべてに受験番号及び氏名をはっきり記入すること。
5. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に明瞭に記入すること。
ただし解答欄が不足する場合は、下書欄(裏面)にはみだしてもよい。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は、無効にすることがある。
7. 本学受験票及び大学入試センター試験受験票を机の右上に出しておくこと。
8. 試験時間は 120 分である。
9. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答用紙は持ち帰らないこと。

数 学

(各問 50 点)

- 1 図のように 3 つの頂点 A, B, C が線分でつながっている。



この図形の上を点 P が次の規則に従って動く。以下、 n は 0 以上の整数である。

- ・時刻 0 に点 P は頂点 A にいる。
- ・時刻 n に点 P が頂点 A にいる場合、時刻 $n+1$ において、確率 $\frac{1}{2}$ で頂点 A にとどまっているか、確率 $\frac{1}{2}$ で頂点 B に移動している。
- ・時刻 n に点 P が頂点 B にいる場合、時刻 $n+1$ において、確率 $\frac{1}{3}$ で頂点 B にとどまっているか、確率 $\frac{1}{3}$ で頂点 A に移動しているか、確率 $\frac{1}{3}$ で頂点 C に移動している。
- ・時刻 n に点 P が頂点 C にいる場合、時刻 $n+1$ において、確率 $\frac{1}{2}$ で頂点 C にとどまっているか、確率 $\frac{1}{2}$ で頂点 B に移動している。

時刻 n に点 P が頂点 A, B, C にいる確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とする。

- (1) $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ を、 a_n, b_n, c_n を用いて表せ。
- (2) (1)の結果と $a_n + b_n + c_n = 1$ を利用して、 b_n を n の式で表せ。
- (3) $p_n = 2^n a_n$ とおく。 p_n を n の式で表せ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ を求めよ。

2

- (1) k, l を自然数として、異なる k 個の複素数 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ と異なる l 個の複素数 $\beta_1, \dots, \beta_l$ を考える。任意の複素数 z について、 k 個の複素数 $z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_k$ の積と l 個の複素数 $z - \beta_1, \dots, z - \beta_l$ の積が等しい、すなわち

$$(z - \alpha_1) \times \dots \times (z - \alpha_k) = (z - \beta_1) \times \dots \times (z - \beta_l)$$

とする。このとき、 $k = l$ であって、 $\beta_1, \dots, \beta_l$ を並び替えると $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ になることを示せ。

- (2) n を自然数とする。方程式 $z^n = 1$ の解は、ある複素数 ω を用いて表される n 個の複素数 ω^k ($k = 1, 2, \dots, n$) であることを示せ。
- (3) m, n を自然数とする。 m が n の約数であることは、方程式 $z^m = 1$ の任意の解が方程式 $z^n = 1$ の解になるための必要十分条件であることを示せ。

3 四面体 OABC において、 $\triangle ABC$ の重心を G、 $\triangle OAB$ の重心を H とする。

(1) 直線 OG と直線 CH は交わることを示せ。

以下では、直線 OG と直線 CH の交点を I として、 $OI = AI = BI = CI$ とする。

(2) $\vec{OI}$ を $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ を用いて表せ。

(3) $OA = BC$, $OB = CA$, $OC = AB$ を示せ。

(4) $OA = 1$, $OB = \sqrt{2}$, $OC = \sqrt{2}$ のとき、I を中心として、平面 OAB とただ一つの共有点を持つような球の半径を求めよ。

4 a, b を実数とする。曲線 $y = e^x$ と直線 $y = ax + b$ は $0 \leq x \leq 1$ の範囲で異なる 2 点で交わるとする。区間 $0 \leq x \leq 1$ を定義域とする関数

$$f(x) = |e^x - (ax + b)|$$

を考える。

(1) $a > 0$ を示せ。

(2) $b > 0$ を示せ。

(3) $f(x)$ を最大にする x の値が 3 個存在するとき、 a と b を求めよ。

(4) (3)のときの a, b に対して、

$$\int_0^1 e^x dx \leq \int_0^1 (ax + b) dx$$

を示せ。