

滋賀医科大学

平成 25 年度

医学科(前期日程)入学試験問題

数 学

(注 意)

1. 問題冊子は試験開始の合図があるまで開かないこと。
2. 問題冊子は表紙のほか 2 ページである。
3. 試験中に問題冊子及び解答用紙の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせること。
4. 解答用紙のすべてに受験番号及び氏名をはっきり記入すること。
5. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に明瞭に記入すること。
ただし解答欄が不足する場合は、下書欄(裏面)にはみだしてもよい。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は、無効にすることがある。
7. 本学受験票及び大学入試センター試験受験票を机の右上に出しておくこと。
8. 試験時間は 120 分である。
9. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答用紙は持ち帰らないこと。

数 学

(各問 50 点)

1 正の整数 n, p, q について, 等式

$$(\sqrt{p} + \sqrt{q})^{2n-1} = a_n \sqrt{p} + b_n \sqrt{q}$$

を考える。

- (1) ある正の整数 a_n, b_n が上の等式を満たすことを示せ。
- (2) $\sqrt{pq}$ が整数でないとき, (1)の a_n, b_n はただ一通りに定まることを示せ。
- (3) $\sqrt{pq}$ が整数でないとき, (1)の a_n, b_n に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ を求めよ。

2 平面上で 2 つの円 S, S' が点 P で内接している。ただし S' が S より小さいとする。円 S, S' の中心をそれぞれ O, O' とおく。円 S' 上にあって直線 PO' 上にはない点 Q をとる。直線 PQ と円 S との P とは異なる交点を A , 直線 AO と円 S との A とは異なる交点を B , 直線 BO' と円 S との B とは異なる交点を C , 直線 CQ と円 S との C とは異なる交点を D とする。

- (1) $AO \parallel QO'$ を示せ。
- (2) $DB = BP$ を示せ。

3 実数 a に対し、行列 $X(a)$ を

$$X(a) = \frac{1}{a^2 + 1} \begin{pmatrix} 2a^2 + 1 & -a \\ -a & a^2 + 2 \end{pmatrix}$$

と定める。

- (1) ベクトル $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ を考える。ベクトル $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $X(a) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ の大きさをそれぞれ l_0 , l_1 とおく。このとき

$$l_0 \leq l_1$$

を示せ。ただしベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の大きさとは $\sqrt{x^2 + y^2}$ のことである。

- (2) (1) で $l_0 = l_1$ となるとき、 $X(a) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ を示せ。

- (3) a , b が異なる実数のとき、 $X(a)^m = X(b)^n$ となるような正の整数 m , n は存在しないことを示せ。

4 xy 平面において、連立不等式

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

で定まる図形を S とする。 t を $0 < t < 1$ となる定数とし、 S を直線 $y = t$ で2つの部分に切断する。 S_1 を S と領域 $y \geq t$ の共通部分、 S_2 を S と領域 $y \leq t$ の共通部分とする。

- (1) 図形 S_1 , S_2 を描け。
- (2) S_1 , S_2 を y 軸の周りに1回転させてできる立体をそれぞれ V_1 , V_2 とする。不等式

$$\frac{(S_1 \text{ の面積})}{(S_2 \text{ の面積})} \geq \frac{(V_1 \text{ の体積})}{(V_2 \text{ の体積})}$$

を示せ。