

令和 7 年 度

数 学

注意事項

1. 問題は 4 題で、すべて必答問題です。
2. 解答はすべて別紙(解答用紙 4 枚)の該当する欄に記入しなさい。
3. 解答用紙の裏面を使用する場合は、表面の右下に「裏面に続く」と記入し、表面の下の部分を持って上にめくり記入しなさい。表面とは書く方向が反対になります。
4. 図やグラフは解答の中で重要な位置をしめます。その特徴をおさえて、ていねいにかきなさい。
5. 解答者がたどる道筋や問題解決に至る要点を明確に意識して、論述式的答案を読みやすく書きなさい。
6. 問題用紙の余白は、下書きやミスがないかどうか見直すのに十分活用しなさい。

- 1 以下の枠内の問題に対する答案Aの中にある2つの下線部(a)および(b)の詳細な証明を与え、さらに空欄(c)に入る式を答えよ。

問題

n を自然数とする。係数がすべて実数の n 次多項式 $f(x)$ に対して、方程式 $f(x) = 0$ の実数解の個数が n 個ならば、 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が定める方程式 $f'(x) = 0$ の実数解の個数は $(n - 1)$ 個であることを証明せよ。

【答案A】：異なる実数 α, β ($\alpha < \beta$) が方程式 $f(x) = 0$ の解ならば、 $\underline{f'(x) = 0}$
 の実数解 γ ($\alpha < \gamma < \beta$) が存在する。よって、 $f(x) = 0$ の異なる実数解の個数
 が m 個ならば、 $f'(x) = 0$ の異なる実数解の個数は $(m - 1)$ 個以上である。次
 に、実数 α を $f(x) = 0$ の重複度 d の解(定義は以下の注意を参照)としたと
 き、 $d \geq 2$ ならば、 $\underline{\alpha}$ は $f'(x) = 0$ の重複度 $(d - 1)$ の解である。従って、
 $f(x) = 0$ の異なる m 個の実数解の重複度をそれぞれ d_i ($1 \leq i \leq m$) とすれ
 ば、 $f'(x) = 0$ の実数解の個数は

$$(m - 1) + \sum_{i=1}^m (d_i - 1) = \boxed{\text{(c)}}$$

個以上である。ここで、 $f'(x)$ は $(n - 1)$ 次の多項式であるから $f'(x) = 0$ の解
 はすべて実数である。(答案終了)

(注意)：多項式 $g(x)$ が複素数 x_0 と自然数 k および多項式 $h(x)$ を用いて

$$g(x) = (x - x_0)^k h(x), \quad h(x_0) \neq 0$$

とかけるとき、 k を「 x_0 の重複度」といい、 x_0 を「方程式 $g(x) = 0$ の重複度 k の解」という。

2 1 から 6 までの目がすべて同じ確率で出るさいころが 1 つある。以下の問いに答えよ。

- (1) このさいころを使って、1 から 10 までの 10 通りの数をどれも同じ確率で得ることができる方法を 1 つ示せ。ただし、さいころは何回振ってもかまわない。
- (2) このさいころを使って、1 から 100 までの 100 通りの数をどれも同じ確率で得ることができる方法を 1 つ示せ。ただし、さいころは何回振ってもかまわない。
- (3) (2)で与えた方法で 1 から 100 までの数を 200 個求め、それらを順に $x_1, x_2, \dots, x_{100}, y_1, y_2, \dots, y_{100}$ とする。これらを用いて、 $x_i^2 + y_i^2 \leq 10000$ ($i = 1, 2, \dots, 100$) を満たす i の個数を求める。これによりどのような値を知ることができるかを答えよ。
- (4) (3)で知ることができた値の精度をよりよくする方法を 1 つ示せ。

3

以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ ($x \geq 0$) および正の実数 a に対して

$$L(a) = \int_0^a \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

を求めよ。

- (2) 関数

$$g(x) = ||2 - x| - 1| - 1$$

に対して、 $y = g(x)$ のグラフをかけ。

- (3) $y = x^{\frac{2}{3}}$ ($x \geq 0$) と $y = g(x)$ で囲まれた領域の境界線の長さを求めよ。

4 自然数 n に対して, n より大きく $n + 50$ より小さい素数の個数を $p(n)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $p(1)$ を求めよ。

(2) $p(50! + 1)$ を求めよ。

(3) すべての自然数 n に対して, 不等式 $|p(n) - p(n + 1)| \leq 1$ を証明せよ。

(4) $p(n) = 1$ となる自然数 n が存在することを証明せよ。

