東北大学　医学部 歯学部

平成 27 年度前期日程入学試験学力検査問題

平成 27 年 2 月 26 日

数　学

（理系
医学部医学科
医学部保健学科放射線技術科学専攻・
検査技術科学専攻）

志望学部／学科／専攻	試験時間	指定解答用紙
理学部 医学部医学科 医学部保健学科放射線技術科学専攻 医学部保健学科検査技術科学専攻 歯学部 薬学部 工学部 農学部	10：00～12：30 (150 分)	Ⓘ，Ⓘ，Ⓘのマークの用紙（各表・裏）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子，解答用紙を開いてはいけない。
2. この問題冊子は，6 ページである。問題冊子の白紙のページや問題の余白は草案のために使用してよい。なお，ページの脱落，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 解答は，必ず黒鉛筆（シャープペンシルも可）で記入し，ボールペン・万年筆などを使用してはいけない。
4. 解答用紙の受験記号番号欄（1 枚につき 2 か所）には，忘れずに受験票と同じ受験記号番号をはっきりと判読できるように記入すること。
5. 解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
6. 解答用紙を持ち帰ってはいけない。
7. 試験終了後，この問題冊子は持ち帰ること。

前期：理学部・医学部（医学科，保健学科放射線技術科学専攻・検査技術科学専攻）・歯学部・薬学部・工学部・農学部

$\boxed{1}$ xy 平面において、次の式が表す曲線を C とする。

$$x^2 + 4y^2 = 1, \quad x > 0, \quad y > 0$$

P を C 上の点とする。P で C に接する直線を l とし、P を通り l と垂直な直線を m として、x 軸と y 軸と m で囲まれてできる三角形の面積を S とする。P が C 上の点全体を動くとき、S の最大値とそのときの P の座標を求めよ。

$\boxed{2}$ xy 平面において、3 次関数 $y = x^3 - x$ のグラフを C とし、不等式

$$x^3 - x > y > -x$$

の表す領域を D とする。また、P を D の点とする。

(1) P を通り C に接する直線が 3 本存在することを示せ。

(2) P を通り C に接する 3 本の直線の傾きの和と積がともに 0 となるような P の座標を求めよ。

3 サイコロを 3 回投げて出た目の数を順に p_1, p_2, p_3 とし、x の 2 次方程式

$$2p_1x^2 + p_2x + 2p_3 = 0 \qquad \cdots\cdots \quad (*)$$

を考える。

(1) 方程式 $(*)$ が実数解をもつ確率を求めよ。

(2) 方程式 $(*)$ が実数でない 2 つの複素数解 α, β をもち、かつ $\alpha\beta = 1$ が成り立つ確率を求めよ。

(3) 方程式 $(*)$ が実数でない 2 つの複素数解 α, β をもち、かつ $\alpha\beta < 1$ が成り立つ確率を求めよ。

4 $a > 0$ を実数とする。$n = 1, 2, 3, \ldots$ に対し、座標平面の 3 点

$$\left(2n\pi,\ 0\right), \quad \left((2n+\frac{1}{2})\pi,\ \frac{1}{\{(2n+\frac{1}{2})\pi\}^a}\right), \quad \left((2n+1)\pi,\ 0\right)$$

を頂点とする三角形の面積を A_n とし、

$$B_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{x^a}dx, \qquad C_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x^a}dx$$

とおく。

(1) $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対し、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq B_n \leqq \frac{2}{(2n\pi)^a}$$

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n}$ を求めよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{C_n}$ を求めよ。

$\boxed{5}$ $t>0$ を実数とする。座標平面において、3 点 $\mathrm{A}(-2,0)$, $\mathrm{B}(2,0)$, $\mathrm{P}(t,\sqrt{3}\,t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える。

(1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。

(2) 三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。

(3) 辺 AB, BP, PA の中点をそれぞれ M, Q, R とおく。t が (1) で求めた範囲を動くとき、三角形 ABP を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と、そのときの t の値を求めよ。

$\boxed{6}$ $k \geqq 2$ と n を自然数とする。n が k 個の連続する自然数の和であるとき、すなわち、

$$n = m + (m+1) + \cdots + (m+k-1)$$

が成り立つような自然数 m が存在するとき、n を k-連続和とよぶことにする。ただし、自然数とは 1 以上の整数のことである。

(1) n が k-連続和であることは、次の条件 (A), (B) の両方が成り立つことと同値であることを示せ。

(A) $\dfrac{n}{k} - \dfrac{k}{2} + \dfrac{1}{2}$ は整数である。

(B) $2n > k^2$ が成り立つ。

(2) f を自然数とする。$n = 2^f$ のとき、n が k-連続和となるような自然数 $k \geqq 2$ は存在しないことを示せ。

(3) f を自然数とし、p を 2 でない素数とする。$n = p^f$ のとき、n が k-連続和となるような自然数 $k \geqq 2$ の個数を求めよ。