平成 21 年度入学者選抜個別(第 2 次)学力検査問題

数　　学

注 意 事 項

1. 監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。
2. 問題冊子は，全部で 8 ページあります。
3. 解答用紙は，問題冊子と別に印刷されているので，誤らないように注意しなさい。
4. 解答用紙には，必ず解答の過程と結果を記入しなさい。
5. 解答は，必ず解答用紙の点線より左に記入しなさい。
6. 下書は，各問題の余白を利用し，なお不足する場合は，問題冊子の第 1 ページの表裏と第 4 ページの裏から第 8 ページの裏まで使用しなさい。ただし，切り離してはいけません。
7. 各解答用紙には，受験番号欄が 2 カ所ずつあります。それぞれ記入を忘れないこと。
8. 解答用紙は，記入の有無にかかわらず，机上に置き，持ち帰ってはいけません。この冊子は持ち帰りなさい。
9. 落丁または印刷の不鮮明な箇所があれば申し出なさい。

下　書　用　紙　（切り取ってはいけない）

1 座標平面または座標空間において，座標成分がすべて整数である点を格子点という。以下の各問いに答えよ。

(1) C_1 を座標平面上の半径 0.5 の円とする。C_1 が内部に格子点を含まないとき，C_1 の中心 $(x,\ y)$ が存在しうる領域を $0 \leqq x \leqq 2$，$0 \leqq y \leqq 2$ の範囲で図示せよ。

(2) C_2 を座標平面上の半径 0.75 の円とする。C_2 は中心をどのような位置に移動させても必ず内部に格子点を含むことを証明せよ。

(3) S を座標空間内の半径 r の球とする。S は半径を変化させずに中心をどのような位置に移動させても，必ず内部に格子点を含むとする。このとき r のとりうる値の範囲を求めよ。ここで S の内部とは，S の中心からの距離が r より小さい点全体からなる集合のことである。

2 正の実数 a，b，c を係数とする2次式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ に関して，次の条件Cを考える。

条件C：3で割り切れないすべての整数 x について $f(x)$ が整数となる。

このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $f(x)$ が条件Cを満たすとき，$g(x) = f(x+3) - f(x)$ は係数および定数項が整数となる1次式であることを示せ。

(2) 条件Cを満たす $f(x)$ のうち，$f(1) = 1$ となるものを求めよ。

(3) 以下の条件C′が条件Cと同値となるような自然数の組 (m_1, m_2, m_3) のうち，$m_1 + m_2 + m_3$ が最小となるものを求めよ。

条件C′：$m_1 b$，$m_2 a + m_3 b$，$a + b + c$ がいずれも整数となる。

(4) n を自然数とする。条件Cを満たす $f(x)$ のうち，$f(1) = n$ となるものの個数を n を用いて表せ。

3 関数 $f(x) = \sin 2x + a\cos x$ について，以下の各問いに答えよ。

(1) $f(x)$が区間 $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ の相異なる2点で極値を持つような，aの値の範囲を求めよ。

(2) aが(1)で求めた範囲にあるとき，$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |f(x)|dx$ をaを用いて表せ。

(3) aが(1)で求めた範囲にあるとき，$f(x)$が極値をとるxの値を $x = \alpha, \beta$ (ただし $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$) とする。$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$ をaを用いて表せ。

下　書　用　紙　（切り取ってはいけない）

下　書　用　紙　（切り取ってはいけない）

下　書　用　紙　（切り取ってはいけない）

下　書　用　紙 （切り取ってはいけない）