1 以下の各問いに答えよ。

(1) 次の条件(a), (b)を同時に満たす複素数 z をすべて求め，複素数平面上に図示せよ。ただし $\bar{z}$ は z の共役複素数を表す。

(a) $|z| \leqq 1$

(b) $z + \bar{z}$ および $z\bar{z}$ はともに整数。

(2) 次の条件(c), (d)を同時に満たす点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ をすべて求め，座標平面上に図示せよ。

(c) $p,\ q$ は整数。

(d) $|z| > 1$ を満たす任意の複素数 z に対して $z^2 - pz + q \neq 0$ が成立する。

2 Mを逆行列を持つ2次の正方行列とする。数列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$を

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定義し，(x_n, y_n) を座標とする平面上の点を P_n とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) P_1 が P_0 と異なるとき，すべての自然数 n に対して P_n は P_{n-1} と異なることを示せ。

(2) 定数θを用いて$(x_1, y_1) = (\cos\theta, \sin\theta)$，$(x_2, y_2) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$と表されているとき，すべての自然数 n に対して

$$(x_n, y_n) = (\cos n\theta, \sin n\theta)$$

となることを示せ。

(3) $\mathrm{A}(1, 0)$，$\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$とし，C，D，E，Fをそれぞれ

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OD}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = -\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OF}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

を満たす点とする。ここでOは原点を表す。以下の条件(a)，(b)，(c)がすべて成立しているとき，行列Mを求めよ。

(a) すべての自然数 n に対して，P_n はA，B，C，D，E，Fのいずれかと一致する。

(b) P_1 はBと一致する。

(c) P_6 はAとは異なる。

3 正の定数 a, b に対して，曲線 C を媒介変数 t を用いて次式で定義する。

$$C: \quad x = a\cos^3 t,\ y = b\sin^3 t \qquad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(a\cos^3\theta,\ b\sin^3\theta)$，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，における C の接線と x 軸および y 軸との交点をそれぞれ Q，R とする。このとき線分 QR の長さ $l(\theta)$ を求めよ。

(2) $\dfrac{d}{d\theta}\{l(\theta)\}^2$ を求めよ。

(3) 曲線 C の長さを求めよ。