1 以下の各問いに答えよ。ただし π は円周率を表す。

(1) 複素数 z が $1+z+z^2+z^3+z^4=0$ を満たすとき

$$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)$$

の値を求めよ。

(2) 絶対値 1，偏角 $2\theta\,(0 \leqq \theta < \pi)$ の複素数 ω に対して $r=|1-\omega|$ とおくとき，$\sin\theta$ を r を用いて表せ。

(3) $\sin\dfrac{\pi}{5}\sin\dfrac{2\pi}{5}\sin\dfrac{3\pi}{5}\sin\dfrac{4\pi}{5}$ の値を求めよ。

2 以下の各問いに答えよ。

(1) 座標平面上で3点$O(0,\ 0)$, $A(1,\ 0)$, $B(0,\ 1)$を頂点にもつ正方形を考える。実数t($0 \leqq t \leqq 2$)に対して，2点$P(t,\ 0)$, $Q(0,\ t)$を通る直線とこの正方形が交わってできる線分の長さを$L(t)$とする。このとき，関数$L(t)$のグラフを描き，定積分$\displaystyle\int_0^2 L(t)\,dt$の値を求めよ。

(2) 座標空間において4点$O(0,\ 0,\ 0)$, $A(1,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 1,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ 1)$を頂点にもつ立方体を考える。実数t($0 \leqq t \leqq 3$)に対して，3点$P(t,\ 0,\ 0)$, $Q(0,\ t,\ 0)$, $R(0,\ 0,\ t)$を通る平面によるこの立方体の切り口の面積を$S(t)$とする。このとき，関数$S(t)$の最大値を求めよ。

(3) 定積分$\displaystyle\int_0^3 S(t)\,dt$の値を求めよ。

3 数の集合 A に関する以下の諸条件を考える。ただし n, k は $n \geqq k \geqq 0$ を満たす整数とし，x, y は任意の数とする。

条件 Z ： x が A の要素ならば x は整数。

条件 P_n ： x が A の要素ならば $1 \leqq x$ かつ $x \leqq n$。

条件 Q_k ： A はちょうど k 個の要素からなる。

条件 R ： x, y が A の要素ならば $x - y + 1 \neq 0$。

条件 $S_{n,k}$ ： A は3条件 Z, P_n, Q_k を満たす。

条件 $T_{n,k}$ ： A は条件 $S_{n,k}$ および条件 R を満たす。

条件 $S_{n,k}$ を満たすような集合 A の個数を $f(n,\ k)$ と表し，条件 $T_{n,k}$ を満たすような集合 A の個数を $g(n,\ k)$ と表す。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $f(n,\ 0)$ および $f(n,\ n)$ を求めよ。また，$n > k \geqq 1$ のとき $f(n,\ k)$ を $f(n-1,\ k)$ と $f(n-1,\ k-1)$ を用いて表せ。

(2) $n > k \geqq 1$ のとき $g(n,\ k)$ を $g(n-1,\ k)$ と $g(n-2,\ k-1)$ を用いて表せ。

(3) $m \geqq 1$, $\ell \geqq 0$ なる整数 m, ℓ に対して整数 $h(m,\ \ell)$ を

$$h(m,\ \ell) = g(m+\ell-1,\ \ell)$$

で定義する。このとき $h(m,\ 0)$ および $h(m,\ m)$ を求めよ。また，$m > \ell \geqq 1$ のとき $h(m,\ \ell)$ を $h(m-1,\ \ell)$ と $h(m-1,\ \ell-1)$ を用いて表せ。

(4) $g(12,\ 4)$ を求めよ。