

1 箱の中に2枚のカードが入っていて、1枚には複素数 $1+i$ が、他の1枚には $\frac{1-i}{2}$ が記入してある (i は虚数単位)。この箱からランダムに1枚のカードを取り出し、カードに記された複素数を記録した後にカードを元の箱に戻す。この操作を何度も繰り返し、第 n 回目の操作で記録された複素数を u_n とする。 u_1 から u_n までの積 $z_n = u_1 u_2 \cdots u_n$ に関して以下の確率を求めよ。

(1) $z_4 = 1$ となる確率。

(2) $|z_{10}| < 6$ となる確率。

(3) n が偶数のとき、 z_n が虚数となる確率。

2 座標平面上にベクトル $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (1, 4)$, $\vec{c} = (2, 3)$, $\vec{d} = (3, 3)$ が与えられている。以下のそれぞれについて、点 P が動く領域を座標平面上に図示せよ。

(1) 実数 r, s が $\frac{1}{2} \leq r + s \leq 1$, $r \geq 0$, $s \geq 0$ を満たしながら動くとき、ベクトル $\vec{p} = r\vec{a} + s\vec{b}$ を位置ベクトルとする点 P。

(2) 実数 r, s, t が $r + s + t = 1$, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $t \geq 0$ を満たしながら動くとき、ベクトル $\vec{p} = r\vec{a} + s\vec{b} - t\vec{c}$ を位置ベクトルとする点 P。

(3) 実数 r, s, t, u が $1 \leq r + s + t + u \leq 2$, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $t \geq 0$, $u \geq 0$ を満たしながら動くとき、ベクトル $\vec{p} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} + u\vec{d}$ を位置ベクトルとする点 P。

3 関数 $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ ($x \geq 1$) およびその逆関数 $g(x)$ ($x \geq 0$) のグラフをそれぞれ C_1 , C_2 とする。

- (1) C_1 上の点 $(a, f(a))$ における C_1 の法線 ℓ_1 と C_2 上の点 $(f(b), b)$ における C_2 の法線 ℓ_2 とが平行であるとき, a を用いて b を表せ。
- (2) 点 $(g(1), 1)$ における C_1 の法線 ℓ と曲線 C_1 および x 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ。
- (3) 点 P が C_1 上を, 点 Q が C_2 上をそれぞれ動くとき, 線分 PQ の長さの最小値を求めよ。